AM210 12/13: Tracce delle lezioni- XI Settimana

IL PROBLEMA DI CAUCHY

Sia $f \in C(O, \mathbf{R}^n)$, $x \in O \subset \mathbf{R}^n$ aperto. Trovare, se esistono, $\delta > 0$, e una funzione $\gamma \in C^1((-\delta, \delta), O)$ tali che

$$\dot{\gamma}(t) = f(\gamma(t)) \qquad \forall t \in (-\delta, \delta), \qquad \gamma(0) = x \qquad (*)$$

NOMENCLATURA. L'equazione $\dot{\gamma}(t) = f(\gamma(t))$ é infatti un **sistema di** n **equazioni differenziali** nelle n (funzioni) incognite $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \ldots, \gamma_n(t))$:

$$\dot{\gamma}_i(t) = f_i(\gamma(t)) \quad \forall t \in (-\delta, \delta), \qquad \gamma_i(0) = x_i \qquad i = 1, \ldots, n \qquad (*)$$

La condizione $\gamma(0) = x$ si chiama **condizione iniziale**.

La funzione data f si chiama anche **campo di vettori** in O (i vettori $f(x)$ applicati nei punti $x \in O$). Una soluzione γ é una *curva tangente in ogni suo punto al campo di vettori* f e si chiama anche **curva integrale** del campo. Al variare della condizione iniziale x in O si otterrá una famiglia di curve $\gamma^x(t)$ che si chiamerá **flusso** generato dal campo f.

Dal punto di vista dinamico, f é un **campo di velocitá** e $\gamma(t)$ é, al variare di t, la **traiettoria od orbita** di un punto mobile la cui velocitá all'istante t é data da $f(\gamma(t))$ e che si trova nell'istante iniziale $t = 0$ nella posizione iniziale x.

ESEMPIO. *Sistemi lineari* $n \times n$. Data $\mathcal{A} := (a_{ij})$ matrice $n \times n$, le resta associato il sistema di n (EDO) in n incognite $x_i = x_i(t)$:

$$\dot{x}_i(t) = a_{i1}x_1(t) + \ldots + a_{in}x_n(t) \qquad i = 1, \ldots, n \qquad (EDO)$$

Osserviamo che se $\mathcal{P}$ é matrice $n \times n$ invertibile e $x(t)$ é soluzione di (EDO), posto $y(t) := \mathcal{P}^{-1}x(t)$, risulta $\dot{y} = \dot{\overline{\mathcal{P}^{-1}x}} = \mathcal{P}^{-1}\dot{x} = \mathcal{P}^{-1}\mathcal{A}x = (\mathcal{P}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{P})y$. Dunque x é soluzione di (ED=) se e solo se $y(t) := \mathcal{P}^{-1}x(t)$ é soluzione del nuovo sistema

$$\dot{y} = (\mathcal{P}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{P})y$$

Come noto, scelte opportune di $\mathcal{P}$ permettono di portare $\mathcal{A}$ in forme piú semplici, le forme canoniche. Ad esempio, se $\mathcal{A}$ ha n autovettori ξ^j linearmente indipendenti, corrispondenti ad autovalori λ_j, e $\mathcal{P}$ é la matrice che ha per colonne gli autovettori, allora $\mathcal{P}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{P}$ é matrice diagonale, con elementi della diagonale dati dai λ_j.

Richiamiamo le forme canoniche nel caso $n = 2$. Un ruolo fondamentale nella riduzione a forma canonica é giuocato dall'analisi spettrale della matrice dei coefficenti $\mathcal{A}$. Le forme canoniche corrispondono ai casi seguenti: la matrice $\mathcal{A}$ ha

(i) due autovalori reali $\lambda_1 \leq \lambda_2$ con due autovettori linearmente indipendenti; forma canonica corrispondente: matrice diagonale con elementi λ_1, λ_2

(ii) due autovalori coincidenti $\lambda_1 = \lambda_2 := \lambda$, con $\quad \ker(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I}) = \mathbf{R}\xi$
forma canonica corrispondente: $\quad a_{ii} = \lambda, \quad a_{21} = 0$
Per vederlo, basta prendere come $\mathcal{P}$ la matrice che ha per colonne ξ ed $\eta \notin \ker(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I})$, tale che $\quad (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I})^2(\eta) = 0$.

(iii) due autovalori complessi coniugati $a \pm ib$;
forma canonica corrispondente: $\quad a_{ii} = a, \quad a_{12} = b, \quad a_{21} = -b.$
Per vederlo, basta prendere come $\mathcal{P}$ la matrice che ha per colonne parte reale e coefficente della parte immaginaria dell'auovettore corrispondente ad $a + ib$.

Nel caso (i) abbiamo il sistema $\qquad \dot{x} = \lambda_1 x, \quad \dot{y} = \lambda_2 y$

La soluzione di punto iniziale (traiettoria passante per) (x_0, y_0) é

$$x(t) = x_0 e^{\lambda_1 t}, \qquad y(t) = y_0 e^{\lambda_2 t}$$

Notiamo che se $\lambda_1 \, \lambda_2 > 0$, le traiettorie sono asintotiche all'equilibrio $(0, 0)$:

$$(x(t), y(t)) \to (0, 0) \quad \text{per } t \to -\infty, \text{ se } \lambda_1 > 0, \text{ oppure per } t \to +\infty, \text{ se } \lambda_2 < 0\ .$$

Nel tracciare le traiettorie, possiamo supporre $x_0, y_0 \geq 0$; gli altri casi si deducono per riflessione rispetto agli assi. Se $y_0 = 0$ (risp. $x_0 = 0$), il moto avviene lungo l'asse delle x (risp. delle y). Come osservato sopra,

l' origine é un punto di equilibrio repulsivo se $\lambda_1 > 0$: $\quad \dot{x} > 0\ ,\ \dot{y} > 0,$
ed é invece *attrattivo* se $\lambda_2 < 0$: $\quad \dot{x} < 0, \quad \dot{y} < 0.$

Eliminando il parametro, si trova l'equazione cartesiana della traiettoria:

$$y = y_0 \left(\frac{x}{x_0}\right)^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} \qquad x > 0$$

Nel caso $\quad \lambda_1 < 0 < \lambda_2 \quad$ le traiettorie, diverse dai semi assi, non sono asintotiche all'equilibrio, che é parzialmente attrattivo/parzialmente repulsivo, ma sono piuttosto simili a rami di iperboli (come quando $\frac{b}{a} = -1$).

Nel caso (ii) abbiamo il sistema $\quad \dot{x} = \lambda x + ay, \quad \dot{y} = \lambda y$

La soluzione della seconda equazione é $\quad y = y(0)e^{\lambda t} \quad$ e la prima equazione diventa $\dot{x} = \lambda x + ay(0)e^{\lambda t} \quad$ e quindi $\quad x(t) = [x(0) + ay(0)t]e^{\lambda t}$. Dunque le soluzioni sono, in dipendenza dalla condizione iniziale (due parametri arbitrari)

$$x(t) = [x(0) + ay(0)t]e^{\lambda t}, \qquad y = y(0)e^{\lambda t}$$

Caso (iii). Il sistema si scrive $\quad \dot{x} = ax + by, \qquad \dot{y} = -bx + ay \quad$ ovvero $\dot{x} - ax = by, \qquad \dot{y} - ay = -bx \quad$ ovvero, posto $\quad \xi(t) := x(t)e^{-at}, \quad \eta(t) = y(t)e^{-at}$

$$\dot{\xi} = b\eta, \qquad \dot{\eta} = -b\xi$$

Se $(\xi(t), \eta(t))$ é soluzione di questo nuovo sistema, allora

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\xi^2 + \eta^2}{2}\right] = \xi\dot{\xi} + \eta\dot{\eta} = b\xi\eta - b\eta\xi \equiv 0$$

e quindi la traiettoria per $(\xi(0), \eta(0) = (x_0, y_0)$, in forma cartesiana, é la circonferenza

$$\xi^2 + \eta^2 = x_0^2 + y_0^2$$

In particolare, le traiettorie del nuovo sistema (ovvero del vecchio nel caso a fosse zero) sono curve chiuse: il moto é periodico (parleremo di *orbite periodiche*). Per ottenere la soluzione in forma parametrica, conviene usare notazioni complesse, ponendo

$$z(t) := \xi(t) + i\eta(t), \quad \dot{z} = \dot{\xi} + i\dot{\eta} = -ib\dot{z} \quad z(0) = \xi(0) + i\eta(0)$$

Troviamo cosi $\qquad z(t) = (\xi(0) + i\eta(0))e^{-ibt} =$

$$(\xi(0)+i\eta(0))(\cos(bt)-i\sin(bt) = \xi(0)\cos(bt)+\eta(0)\sin(bt)+i[\eta(0)\cos(bt)-\xi(0)\sin(bt)]$$

e quindi

$$\xi(t) = \mathcal{R}ez = \xi(0)\cos(bt) + \eta(0)\sin(bt), \qquad \eta(t) = \mathcal{I}mz = \eta(0)\cos(bt) - \xi(0)\sin(bt)$$

Tornando al sistema originario, troviamo la soluzione

$$x(t) = e^{at}[xi(0)\cos(bt) + y(0)\sin(bt)], \qquad y(t) = e^{at}[y(0)\cos(bt) - x(0)\sin(bt)]$$

Notiamo che, mentre questa orbita é una circonferenza quando $a = 0$, nel caso $a \neq 0$, l'orbita é una spirale che si avvolge attorno all'equilibrio.

NOTA. Le soluzioni trovate esistono per tutti i tempi. Questo vale per tutti i sistemi lineari a coefficenti costanti, come conseguenza del teorema di esistenza globale che seguirá.

Una formulazione equivalente del Problema di Cauchy: esistenza di un punto fisso per un operatore integrale

Se $\gamma \in C^1(-\delta,\delta),O)$ é soluzione del Problema di Cauchy $(*)$, allora, per il TFC, $\gamma_i(t) = x + \int_0^t f_i(\gamma(\tau))d\tau$, ovvero, con notazione vettoriale,

$$\gamma(t) = x + \int_0^t f(\gamma(\tau))d\tau \qquad t \in (-\delta,\delta) \qquad\qquad (**)$$

ove, se $x \in C([a,b],\mathbf{R}^n)$, intendiamo che $\int_a^b x(t)dt := (\int_a^b x_1(t)dt, \ldots, \int_a^b x_n(t)dt)$.

Viceversa, se $\gamma \in C(-\delta,\delta),O)$ risolve *l'equazione integrale* $(**)$, allora , di nuovo per il TFC, $\gamma \in C^1(-\delta,\delta),O)$ e soddisfa $(*)$.

Vediamo ora come $(**)$ si riscriva come *equazione di punto fisso per un opportuno operatore integrale.* Per fissare le idee, supponiamo dapprima che $O = \mathbf{R}^n$. É allora definito l'operatore

$$N : C(\mathbf{R},\mathbf{R}^n) \to C^1(\mathbf{R},\mathbf{R}^n) \subset C(\mathbf{R},\mathbf{R}^n), \qquad (N\gamma)(t) := x + \int_0^t f(\gamma(\tau))d\tau$$

Dunque γ é soluzione di (PC) se e solo se é punto fisso di N. Per cominciare, vogliamo mostrare, con **il metodo delle approssimazioni successive** che, se f é Lipschitziana, allora (PC) ha una soluzione, che risulterá essere unica. Avremo bisogno del

FATTO. Sia $x \in C([a,b],\mathbf{R}^n)$. Allora

$$\| \int_a^b x(t)\, dt\|_2 \le \int_a^b \|x(t)\|_2\, dt$$

Infatti, $\| \int_a^b x(t)dt\|_2^2 = \sum_{i=1}^n \left(\int_a^b x_i(t)dt\right)\left(\int_a^b x_i(s)ds\right) = \int_a^b \left[\sum_{i=1}^n \left(\int_a^b x_i(t)dt\right)\, x_i(s)\right] ds.$
Usando Cauchy-Schwartz, troviamo

$$\| \int_a^b x(t)\, dt\|_2^2 \le \int_a^b \left[\, \| \int_a^b x(t)dt\|_2\, \|x(s)\|_2\right] ds = \| \int_a^b x(t)\, dt\|_2 \int_a^b \|x(s)\|_2\, ds$$

Dividendo per $\| \int_a^b x(t)\, dt\|_2$ si ottiene la tesi.

TEOREMA di Picard 1
(esistenza ed unicitá globale per (PC) in ipotesi di Lipschitzianitá globale)

Sia f Lipschitziana in $\mathbf{R}^n$. Allora (PC) ha una ed una sola soluzione.

Prova. Per ipotesi: $\exists L > 0 : \quad \|f(\xi) - f(\eta)\|_2 \leq L\|\xi - \eta\|_2 \quad \forall \xi, \eta \in \mathbf{R}^n$. Proviamo l'esistenza. Sia

$$\gamma_0(t) := x \quad \forall t \in \mathbf{R}, \qquad \gamma_1(t) := x + \int_0^t f(\gamma_0(\tau))d\tau = tx, \ldots \qquad \gamma_{n+1} = N\gamma_n, \ldots$$

Basta provare che

$$\exists \gamma \in C(\mathbf{R}, \mathbf{R}^n) : \quad \forall T > 0, \quad \|\gamma_n - \gamma\|_{\infty;[0,T]} := \sup_{t \in [0,T]} \|\gamma_n(t) - \gamma(t)\|_2 \to_n 0$$

(e similmente su $[-T, 0]$) perché allora, da

$$\gamma_{n+1}(t) = x + \int_0^t f(\gamma_n(\tau))d\tau, \quad \| \int_{-T}^T [f(\gamma_n(\tau)) - f(\gamma(\tau))]d\tau\|_2 \leq 2LT\|\gamma_n - \gamma\|_{\infty;-T,T} \to_n 0$$

segue che $\gamma(t) = x + \int_0^t f(\tau)d\tau \quad \forall t$. E siccome $C([0, T], \mathbf{R}^n)$ munito della norma $\|.\|_{\infty;[0,T]}$ é completo, basta provare che

$$\forall \epsilon, \ \exists n_\epsilon : \qquad \|\gamma_{n+p+1} - \gamma_n\|_{\infty;[0,T]} \leq \epsilon \qquad \forall n \geq n_\epsilon, \forall p \in \mathbf{N}$$

Intanto, se $t \geq 0$ si ha che $\|\gamma_1(t) - \gamma_0(t)\|_2 \leq t\|f(x)\|_2$ e $\|\gamma_2(t) - \gamma_1(t)\|_2 \leq \int_0^t \|f(\gamma_1(\tau)) - f(\gamma_0(\tau))\|_2 \leq L \int_0^t \|\gamma_1(\tau) - \gamma_0(\tau)\|_2 d\tau \leq L \int_0^t \tau\|f(x)\|_2 d\tau = \frac{L^2t^2}{2} \frac{\|f(x)\|_2}{L}$.

Allora, $\|\gamma_{n+1}(t) - \gamma_n(t)\|_2 \leq \dfrac{L^{n+1}t^{n+1}}{n+1!} \dfrac{\|f(x)\|_2}{L} \quad \forall n$ perché $\|\gamma_n(t) - \gamma_{n-1}(t)\|_2 \leq$

$$\leq \frac{L^n t^n}{n!} \frac{\|f(x)\|_2}{L} \quad \Rightarrow \quad \|\gamma_{n+1}(t) - \gamma_n(t)\|_2 \leq \int_0^t \|f(\gamma_n(\tau)) - f(\gamma_{n-1}(\tau))\|_2 d\tau \leq$$

$$\int_0^t L\|\gamma_n(\tau) - \gamma_{n-1}(\tau)\|_2 d\tau \leq \frac{L^{n+1}}{n!} \frac{\|f(x)\|_2}{L} \int_0^t \tau^n d\tau. \qquad \text{Ma allora}$$

$$\|\gamma_{n+p+1}(t) - \gamma_n(t)\|_2 \leq \frac{\|f(x)\|_2}{L} \left[\frac{(Lt)^{n+p+1}}{n+p+1!} + \ldots + \frac{(Lt)^n}{n!} \right] \qquad \text{e quindi}$$

$$\|\gamma_{n+p+1}-\gamma_n\|_{\infty;[0,T]} \leq \frac{\|f(x)\|_2}{L} \sum_{k\geq n} \frac{(LT)^k}{k!} \leq \epsilon \quad \text{se} \quad n \geq n_\epsilon$$

Unicitá. Siano γ, η due soluzioni di (PC) e sia $TL < 1$. Allora

$$t \in [0,T] \quad \Rightarrow \quad \|\gamma(t)-\eta(t)\|_2 \leq \int_0^t \|f(\gamma(\tau))-f(\eta(\tau))\|_2 d\tau \leq$$

$$L\int_0^t \|\gamma(\tau)-\eta(\tau)\|_2 d\tau \leq LT\|\gamma-\eta\|_{\infty;[0,T]} \quad \Rightarrow \quad \|\gamma-\eta\|_{\infty;[0,T]} = 0$$

$$\text{Allora,} \qquad t \in [T,2T] \quad \Rightarrow \quad \|\gamma(t)-\eta(t)\|_2 \leq \int_T^t \|f(\gamma(\tau))-f(\eta(\tau))\|_2 d\tau \leq$$

$$L\int_T^t \|\gamma(\tau)-\eta(\tau)\|_2 d\tau \leq LT\|\gamma-\eta\|_{\infty;[0,2T]} \quad \Rightarrow \quad \|\gamma-\eta\|_{\infty;[0,2T]} = 0$$

e cosi via.

NOTA. Tale Teorema implica anche l'esistenza locale in ipotesi di Lipschitzianitá locale: se

$$\exists r, L > 0: \quad \|f(\xi)-f(\eta)\|_2 \leq \|\xi-\eta\|_2 \qquad \forall \xi, \eta \in B_{2r}(x) \subset O \subset \mathbf{R}^n$$

allora esiste $\delta > 0$ ed esiste $\gamma \in C^1((-\delta,\delta), O)$ soluzione di (PC).
Sia infatti $\varphi \in C^\infty(B_{2r}(x), [0,1])$, $\varphi \equiv 1$ in $B_r(x)$. Siccome $f\varphi$ é chiaramente globalmente Lipschitziana, il Teorema assicura l'esistenza di una soluzione per il Problema di Cauchy relativo a $f\varphi$, e tale soluzione é anche soluzione, per tempi piccoli, del Problema di Cauchy relativo ad f.
Diamo comunque una dimostrazione diretta dell'esistenza ed unicitá locale per (PC) sotto ipotesi di Lipschitzianitá locale, che fornirá anche la dipendenza continua della soluzione dal dato iniziale.

Sia dunque $f \in Lip_{loc}(O, \mathbf{R}^n)$ (per esempio, $f \in C^1(O, \mathbf{R}^n)$), cioé

$$\forall x \in O, \exists r, L > 0: \quad \|f(\xi)-f(\eta)\|_2 \leq \|\xi-\eta\|_2 \qquad \forall \xi, \eta \in B_{2r}(x) \subset O \subset \mathbf{R}^n$$

Data la natura locale delle ipotesi, una soluzione del problema

$$\dot\gamma(t) = f(\gamma(t)) \quad \forall t \in (-\delta,\delta), \qquad \gamma(0) = x \qquad\qquad (PC)$$

si puó cercare, qui, come punto fisso in una opportuna palla chiusa di $C([-\delta,\delta],\mathbf{R}^n)$ della trasformazione

$$(T^x\gamma)(t) := x + \int\limits_0^t f(\gamma(\tau))d\tau \qquad t \in (-\delta,\delta)$$

Piú precisamente, sia $\overline{B}_{2r}(x_0) \subset O$, cosicché , se $x \in B_r(x_0)$, allora

$$\|\gamma(t)-x\| \le r \quad \forall t \in [-\delta,\delta] \quad \Rightarrow \quad \|\gamma(t)-x_0\| \le 2r \quad \forall t \in [-\delta,\delta]$$

Posto

$$M := \sup_{\xi \in \overline{B}_{2r}(x_0)} \|f(\xi)\|$$

eventualmente rimpicciolendo δ, possiamo supporre che $\delta M < r$ e quindi

$$\gamma([-\delta,\delta]) \subset \overline{B}_r(x) \quad \Rightarrow \quad x + \int\limits_0^t f(\gamma(\tau))d\tau \in \overline{B}_{2r}(x_0) \quad \forall t \in [-\delta,\delta]$$

Ció segue dalla diseguaglianza $\|\int\limits_a^b x(t)dt\| \le \int_a^b \|x(t)\|dt.$
Con tale scelta di δ, la formula

$$(T^x\gamma)(t) := x + \int\limits_0^t f(\gamma(\tau))d\tau \qquad t \in [-\delta,\delta]$$

definisce un *operatore integrale* T^x che trasforma $\gamma \in C([-\delta,\delta],\overline{B}_r(x))$ in $T^x\gamma \in C([-\delta,\delta],\overline{B}_r(x))$ cioé T^x *manda lo spazio metrico completo* $C([-\delta,\delta],\overline{B}_r(x))$ *in se*: γ **soddisfa** $(**)$ **se e solo se** γ **é un punto fisso di** T^x.

TEOREMA di Picard 2
(esistenza/unicitá locale/dipendenza continua per (PC) in ipotesi Lip_{loc}*)*

Sia $f \in Lip_{loc}(O)$, *O aperto in* $\mathbf{R}^n$. *Sia* $\overline{B}_{2r}(x_0) \subset O$. *Siano*

$$M := \sup_{x \in \overline{B}_{2r}(x_0)} \|f(x)\|, \qquad \|f(x)-f(y)\| \le k\|x-y\| \quad \forall x,y \in \overline{B}_{2r}(x_0)$$

Sia $\delta > 0$ *tale che* $\delta k < 1$, $\delta M < r$. *Allora: per ogni* $x \in B_r(x_0)$,

$\exists ! \gamma^x \in C^1((-\delta,\delta),B_{2r}(x_0))$ *tale che* $\gamma^x(0) = x$, $\dot\gamma^x(t) = f(\gamma^x(t)) \quad \forall t \in (\delta,\delta)$

Inoltre, γ^x *dipende in modo continuo da* x:

$$\|\gamma^x - \gamma^y\|_\infty = \sup_{t \in [-\delta,\delta]} \|\gamma^x(t)-\gamma^y(t)\|_2 \le \frac{1}{1-\delta k}\|x-y\|_2 \qquad \forall x,y \in B_r(x_0)$$

Prova. Ricordiamo che lo spazio vettoriale $C([-\delta,\delta],\mathbf{R}^n)$, munito della norma $\|\gamma\|_\infty = \sup\limits_{t\in[-\delta,\delta]} \|\gamma(t)\|$, é un Banach, e quindi

$$X := \{\gamma \in C([-\delta,\delta],\mathbf{R}^n) : \quad \|\gamma(t)-x\| \le r \qquad \forall t \in [-\delta,\delta]\}$$

é spazio metrico completo (rispetto alla metrica indotta). Ora, fissato $x \in B_r(x_0)$,

$$\gamma \in X \quad \Rightarrow \quad \|\gamma(t)-x\| \le r \quad \forall t \in [-\delta,\delta] \quad \Rightarrow \quad \|\gamma(t)-x_0\| \le 2r \quad \forall t \in [-\delta,\delta]$$

Dunque, $\forall \gamma \in X$, é definita la funzione $f(\gamma(t)), \quad t \in [-\delta,\delta]$ e quindi lo é la funzione

$$T^x\gamma : t \to x + \int_0^t f(\gamma(\tau))d\tau, \qquad t \in [-\delta,\delta]$$

Chiaramente $\quad T^x\gamma \in C([-\delta,\delta],\mathbf{R}^n) \quad \forall \gamma \in X.$ Inoltre, $\quad \gamma \in X \quad \Rightarrow$

$$\|(T^x\gamma)(t)-x\| = \|\int_0^t f(\gamma(\tau))d\tau\| \le \left|\int_0^t \|f(\gamma(\tau))\|d\tau\right| \le \delta M < r \quad \Rightarrow \quad T\gamma \in X$$

Infine, $\quad \gamma,\beta \in X \quad \Rightarrow \qquad \|T^x\gamma - T^x\beta\|_\infty \le \sup\limits_{t\in[-\delta,\delta]} \|\int_0^t [f(\gamma(\tau)) - f(\beta(\tau))]\, d\tau\| \le$

$$\le \sup_{t\in[-\delta,\delta]} \left|\int_0^t \|f(\gamma(\tau)) - f(\beta(\tau))\|d\tau\right| \le \sup_{t\in[-\delta,\delta]} \left|\int_0^t k\|\gamma(\tau)-\beta(\tau)\|d\tau\right| \le k\delta\|\gamma-\beta\|_\infty$$

perché f é Lipschitziana di costante k in $\overline{B}_{2r}(x_0)$. Siccome $\delta k < 1$, T^x é una contrazione di X in sé e quindi, per il Teorema delle contrazioni

$$\exists\, !\gamma^x \in X : \qquad T^x\gamma^x = \gamma^x. \qquad\qquad \text{Notiamo che} \quad (T\gamma^x)(0) = x.$$

Dunque, γ^x é l'unica soluzione, definita in $[-\delta,\delta]$, del problema di Cauchy

$$\dot\gamma^x(t) = f(\gamma(t)) \quad \forall t \in (-\delta,\delta), \qquad \gamma^x(0) = x$$

Infine, $\quad \|\gamma^x - \gamma^y\|_\infty \le \|x-y\| + \sup\limits_{t\in[-\delta,\delta]} \left|\int_0^t \|f(\gamma^x(\tau)) - f(\gamma^y(\tau))\|d\tau\right| \le$

$$\|x-y\| + \delta k\|\gamma^x-\gamma^y\|_\infty \quad \Rightarrow \quad \|\gamma^x-\gamma^y\|_\infty \le \frac{1}{1-\delta k}\|x-y\| \qquad \forall x,y \in B_r(x_0)$$

PROBLEMA DI CAUCHY: Unicitá globale, soluzione massimale.

Proposizione 1. *Sia* $f \in C^1(O, \mathbf{R}^n)$, *O aperto in* $\mathbf{R}^n$. *Siano* $\gamma \in C^1((a,b))$ *e* $\beta \in C^1((\tilde{a}, \tilde{b}))$ *soluzioni dello stesso problema di Cauchy*

$$\dot{x}(t) = f(x(t)), \qquad x(0) = x_0$$

Se $(a,b) \subset (\tilde{a}, \tilde{b})$, *allora* $\gamma \equiv \beta$ *in* (a,b): β *é un prolungamento della soluzione* γ.

Prova. Per il Teorema di Picard, esiste $\delta > 0$ tale che $\gamma \equiv \beta$ in $|t| \leq \delta$. Quindi

$$\bar{t} := \sup\{t : \quad \gamma(\tau) = \beta(\tau),\, \forall \tau \in [0,t]\}$$

é ben definito e maggiore o uguale a δ. Si tratta di mostrare che $\bar{t} = b$. Sia per assurdo $\bar{t} < b$. Per continuitá, é allora anche $\gamma(\bar{t}) = \beta(\bar{t})$ e inoltre $\gamma(t), \beta(t)$ sono soluzioni dell'equazione differenziale in $(0, \bar{t}]$. Dunque γ, β sono entrambe soluzioni del medesimo problema di Cauchy

$$\dot{x}(t) = f(x(t)), \qquad x(\bar{t}) = \gamma(\bar{t}) = \beta(\bar{t})$$

e quindi coincidono anche in $[\bar{t}, \bar{t} + \sigma]$ per un $\sigma > 0$ piccolo, e quindi

$$\bar{t} := \sup\{t : \quad \gamma(\tau) = \beta(\tau),\, \forall \tau \in [0,t]\} \geq \bar{t} + \sigma$$

contraddizione. Dunque $\gamma \equiv \beta$ in $[0, b)$ e, analogamente, $\gamma \equiv \beta$ in $(a, 0]$).

Una soluzione non prolungabile si chiama **soluzione massimale**. La soluzione massimale é, per via della Prop. 1, unica. Il suo intervallo di definizione si chiama **intervallo massimale di esistenza** e si indica $(t^-(x_0), t^+(x_0))$, o semplicemente, se non vi é ambiguitá, (t^-, t^+).
Se $t^-(x_0) = -\infty$, $t^+(x_0) = +\infty$, diremo che il Problema di Cauchy con condizione iniziale $x(0) = x_0$ ammette **soluzione globale** o per tutti i tempi.

ESEMPI.

Il problema di Cauchy $\dot{x} = x$, $x(0) = x_0$ ha come soluzione massimale $x(t) = x_0 e^t$, $t \in \mathbf{R}$
mentre il problema $\dot{x} = x^2$, $x(0) = x_0 > 0$ ha come soluzione massimale $x(t) = \frac{x_0}{1 - t x_0}$, $t \in (-\infty, \frac{1}{x_0})$.

Proposizione 2. *Sia* $f \in C^1(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$, $\quad \dot\gamma(t) = f(\gamma(t))$, $\quad t \in [0,T)$. *Allora*

$$M := \sup_{t\in[0,T)} \|f(\gamma(t))\| < +\infty \quad \Rightarrow \quad \gamma \quad \text{é prolungabile oltre} \quad T$$

Dunque, $\sup_{t\in(t^-,t^+)} \|f(\gamma(t))\| < +\infty$ *(ad es. se* γ *é limitata)* $\Rightarrow t^- = -\infty, t^+ = +\infty$.

Prova. É $\quad \|\gamma(t) - \gamma(s)\| = \|\int_s^t f(\gamma(\tau))d\tau\| \leq M|t-s| \quad \forall s,t \in [0,T)$ e quindi γ é uniformemente continua in $[0,T)$. Ne deriva che

$$\exists \quad \gamma(T) := \lim_{t\to T^-} \gamma(t) \quad \text{e} \quad \dot\gamma(T) = f(\gamma(T))$$

Detta allora $\hat\gamma$ la soluzione del problema di Cauchy con dato iniziale $\hat\gamma(T) = \gamma(T)$, la funzione uguale a γ in $[0,T)$ ed uguale a $\hat\gamma$ in $[T, T+\delta]$ é di classe C^1 ed é soluzione del sistema differenziale in $[0, T+\delta]$.

Corollario 1. *Sia* $g \in C^1(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$ *tale che*

(i) $\quad \{x : g(x) \leq g(x_0)\}$ é limitato $\quad \forall x_0 \in \mathbf{R}^n \qquad (ii) \quad < \nabla g(x), f(x) > \quad \leq 0 \quad \forall x$

Allora le soluzioni del sistema $\dot x = f(x)$ *sono definite per tutti i tempi positivi.*

Infatti, $\frac{d}{dt} g(x(t)) \; = < \nabla g(x(t)), \dot x > = < \nabla g(x(t)), f(x(t)) > \quad \leq \; 0 \quad \forall t$ e quindi la traiettoria $x(t)$ si mantiene, per tutti i tempi positivi, nella regione limitata $\{g(x) \leq g(x_0)\}$ e quindi $t^+ = +\infty$.

Corollario 2. *Data* $g \in C^1(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$, *siano* $\quad g^M := \{x : \; g(x) \leq M\}$ *e* $\Sigma^M := \{x : \; g(x) = M\}$. *Se*

(i) $\quad g^M := \{x : g(x) \leq M\}$ é limitato $\qquad (ii) \quad < \nabla g(x), f(x) > \quad < 0 \quad \forall x \in \Sigma^M$

allora la soluzione del problema di Cauchy $\quad \dot x = f(x) \quad x(0) = x_0 \quad$ *con* $g(x_0) \leq M$ *é definita per tutti i tempi positivi.*

Infatti $g(x(t)) \leq M \quad \forall t \in [0, t^+(x_0))$, giacché, se no, é ben definito

$T := \inf\{t > 0 : \quad g(x(t)) \geq M\}$ e quindi $\quad g(x(t)) \leq M \forall t \leq T$ e $g(x(T)) = M$

Ma questo é assurdo perché, se $t < T$, $T - t$ piccolo, allora

$$(g \circ x)'(T) \; = < \nabla g(x(T)), x'(T) > = < \nabla g(x(T)), f(x(T)) > \quad < \quad 0 \quad \Rightarrow$$

$$g(x(t)) = g(x(T)) + (t - T)\,[< \nabla g(x(T)), f(x(T)) > + \circ(1)] \quad > \quad g(x(T)) = M$$

ESEMPI E COMPLEMENTI

Esempio 1. Le soluzioni del sistema $\dot{x} = -x^3y^2 \quad \dot{y} = -2y^3x^2$ sono definite per tutti i tempi positivi: basta prendere $g(x,y) = \frac{x^2+y^2}{2}$ per ottenere

$$\frac{d}{dt}g(x(t),y(t)) = \frac{d}{dt}(\frac{x^2+y^2}{2}) = x\dot{x} + y\dot{y} = -x^4y^2 - 2y^4x^2 \leq 0 \qquad \forall t$$

Invece, $t^- > -\infty$ quale che sia la condizione iniziale. Questo si puó vedere cosi':

$$\frac{d}{dt}[x(t)^2y(t)^2] = 2xy^2\dot{x} + 2yx^2\dot{y} = -2xy^2(x^3y^2) - 2yx^2(2y^3x^2) = -6(x^2y^2)^2$$

cioé $z(t) := x(t)^2y(t)^2$ risolve $\dot{z} = -6z^2$ e quindi $z(t) = \frac{z(0)}{1+6z(0)t} \quad t \in (-\frac{1}{6z(0)}, +\infty)$.
Siccome $z(0) = x(0)^2y(0)^2$ e

$$\dot{x} = -x(x^2y^2) = -x\frac{z(0)}{1+6z(0)t} \qquad \dot{y} = -2y(x^2y^2) = -2y\frac{z(0)}{1+6z(0)t}$$

troviamo $\log\frac{x(t)}{x(0)} = -\int\limits_0^t \frac{z(0)}{1+6z(0)s}ds, \qquad \log\frac{y(t)}{y(0)} = -2\int\limits_0^t \frac{z(0)}{1+6z(0)s}ds,$ ovvero

$$x(t) = \frac{x(0)}{(1+6z(0)t)^{\frac{1}{6}}} \qquad y(t) = \frac{y(0)}{(1+6z(0)t)^{\frac{1}{3}}} \qquad t \in (-\frac{1}{6z(0)}, +\infty)$$

Nota anche che $\frac{\dot{y}}{y} = -2x^2y^2 = 2\frac{\dot{x}}{x} \quad \Rightarrow \log\frac{y(t)}{y(0)} = 2\log\frac{x(t)}{x(0)} \Rightarrow \quad y(t) = \frac{y(0)}{x(0)^2}x(t)^2$.

Sistemi gradiente: $\dot{x} = -\nabla F(x) \qquad F \in C^2(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$.

Per applicare i Corollari, basta prendere $g = F$: $< \nabla g(x), f(x) > \; = -\|\nabla F\|^2$ e dedurre che se $\{x \in \mathbf{R}^n : \quad F(x) \leq F(x_0)\}$ é limitato per ogni $x_0 \in \mathbf{R}^n$, allora le soluzioni sono definite per tutti i tempi positivi. In effetti si puó dire di piú:

se F é inferiormente limitata le soluzioni sono definite per tutti i tempi positivi.

Infatti, $\int_0^t \|\nabla F(x(\tau))\|^2 d\tau = -\int_0^t (F(x(\tau)))' d\tau = F(x(0)) - F(x(t)) \leq F(x(0)) - \inf F \Rightarrow \|x(t) - x(s)\| = \| \int_s^t \dot{x}(\tau)d\tau\| \leq \int_s^t \|\nabla F(x(\tau))\|d\tau \leq |t-s|^{\frac{1}{2}} \left(\int_s^t \|\nabla F(x(\tau))\|^2 d\tau\right)^{\frac{1}{2}} \leq |t-s|^{\frac{1}{2}} (F(x(0)) - \inf F)^{\frac{1}{2}} \qquad \forall s < t$ e quindi $x(t)$ é uniformemente continua. Si conclude come nella dimostrazione della Proposizione 2.

Esempio 2. Le soluzioni di $\dot{x} = xy^2(x^2+y^2) \qquad \dot{y} = -yx^4(x^2+y^2)$ sono definite $\forall t$: $\frac{d}{dt}(\frac{x^4}{2} + y^2) = 2x^3\dot{x} + 2y\dot{y} = 2x^4y^2(x^2+y^2) - 2y^2x^4(x^2+y^2) \equiv 0$ e quindi *g é costante lungo le traiettorie,* ovvero le traiettorie sono contenute negli insiemi di livello di g, che sono visibilmente limitati.