Universitá degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di AM120

A.A. 2012-2013 - Docente: Prof. G.Mancini

Tutori: Emanuele Padulano e Francesco Mazzarani

Tutorato 7 - 22 Aprile 2013

1. Calcolare tutte le determinazioni dei seguenti numeri complessi:

   (a) $Log(-3)$

   (b) $Log(\sqrt{3}+i^3)$

   (c) $Log\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{i^n t^n}{n!}\right)$

   (d) i^i

2. Determinare i numeri $z, w \in \mathbb{C}$ tali che:

   (a) $\begin{cases}(\bar{z}-i)^3 = z+i\\ z^5+4z=0\end{cases}$

   (b) $\begin{cases}exp(w)exp(z) = -1+i\\ exp(w)+exp(z) = -1-2i\end{cases}$

3. Studiare la convergenza puntuale ed uniforme delle seguenti successioni di funzioni:

   (a) $f_n(x) = e^{-nx}$

   (b) $f_n(x) = \frac{1}{n}\chi_{[-n,n]}$

   (c) $f_n(x) = \chi_{\left(0,\frac{1}{n}\right]}$

   (d) $f_n(x) = \frac{x}{n^2}$

   (e) $f_n(x) = \frac{x}{x^2+n}$

   (f) $f_n(x) = \begin{cases}\frac{\sin(nx)}{n^2 x} & x \neq 0\\ \frac{1}{n} & x = 0\end{cases}$

   (g) $f_n(x) = \arctan(n^2-x)$

   (h) $f_n(x) = \sin(\pi n x^2)e^{-nx^2}$

4. Studiare la convergenza puntuale, uniforme e totale delle seguenti serie di funzioni:

   (a) $\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nx}$

   (b) $\sum_{n=1}^{+\infty} n^x$

   (c) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x\sin(nx)}{n^2}$

   (d) $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\cos(n^2x)e^{-nx^2}}{1+n^2+x^2}$

   (e) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^2}{nx^4+n^3}$

   (f) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\arctan\left(\frac{x}{n}\right)}{n}$

5. Sia $f_n(x) = \frac{\arctan\left(\frac{x}{n}\right)}{n}$. Calcolare $\lim_{n\to+\infty} f_n(x)$ e $\lim_{n\to+\infty} f_n'(x)$.
   Stabilire se $f_n(x)$ e $f_n'(x)$ convergono uniformemente e dire per quali $x \in \mathbb{R}$ si ha che

   $$\lim_{n\to+\infty} f_n'(x) = \left(\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\right)'.$$

   Svolgere l'esercizio in maniera analoga per $g_n(x) = xe^{-2n^2x^2}$.