

Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

# Tutorato di AM120

A.A. 2012-2013 - Docente: Prof. G.Mancini

Tutori: Emanuele Padulano e Francesco Mazzarani

Tutorato 4 - 11 Marzo 2013

1. Scrivere gli sviluppi di Taylor, in  $x_0 = 0$ , delle seguenti funzioni fino al quinto ordine incluso:

(a)  $e^{\arctan x}$                       (b)  $\sqrt[3]{1 + \sin x}$                       (c)  $\sin(\sinh x) - x \cos(x^2)$

2. Utilizzando gli sviluppi di Taylor, calcolare i seguenti limiti:

(a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 + \log(1 - x)}{\tan x - x}$

(b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - \cos x - \frac{3}{2}x^2}{x^4}$

(c)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1 + x \arctan x) + 1 - e^{x^2}}{\sqrt{1 + 2x^4} - 1}$

(d)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5^{1+\tan^2 x} - 5}{1 - \cos x}$

(e)  $\lim_{x \rightarrow \infty} x - x^2 \log \left( 1 + \sin \frac{1}{x} \right)$

3. Calcolare :

- $\sinh 1$  con un errore inferiore a  $10^{-6}$ ;
- $e^2$  con un errore inferiore a  $10^{-3}$ .

4. Risolvere i seguenti problemi di massimo o minimo:

- (a) Il volume di un prisma retto, la cui base è un triangolo equilatero, è  $V$ . Trovare il lato della base in modo che la superficie totale sia minima.
- (b) Dimostrare che un triangolo, di cui siano dati la base ed il perimetro, ha area massima se è isoscele.
- (c) Fra tutti i rettangoli, con i vertici su di un'ellisse di semiassi  $a$  e  $b$ , trovare quello di area massima.
- (d) Sia dato un rettangolo e si costruisca sul lato maggiore un semicerchio di diametro pari al lato stesso. Sia dato il perimetro di tale figura. Trovare la sua area massima.

5. Dimostrare che se  $f(x)$  é convessa e  $f'(x_0) = 0$  allora  $x_0$  é un punto di minimo assoluto.

6. Usando la convessità di una opportuna funzione, mostrare che:

- $xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$ , con  $x, y \geq 0$  e  $p, q > 1 : \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ .
- $(a + b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p)$ , con  $a, b \geq 0$  e  $p > 1$ .

7. Tracciare il grafico delle seguenti funzioni:

(a)  $\frac{x-1}{x^2-x-6}$

(b)  $\frac{e^x+1}{e^x-1}$

(c)  $x + 2 \cos x$

(d)  $\ln(1 + 2 \sin^2 x)$

(e)  $2x - \arcsin x$

(f)  $\frac{\ln x}{x^2}$

(g)  $\ln x - \arctan(x - 1)$

(h)  $2^x - 5^x$