Universitá degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di AM120

A.A. 2012-2013 - Docente: Prof. G.Mancini

Tutori: Emanuele Padulano e Francesco Mazzarani

Tutorato 3 - 4 Marzo 2013

1. Verificare la validitá del Teorema di Cauchy per le seguenti funzioni negli intervalli indicati:

   (a) $f(x) = x^2 + 1,\ g(x) = x^3 - 1$ in $[1, 2]$

   (b) $f(x) = e^{x^2+1},\ g(x) = x^2 + 2$ in $[0, 1]$

2. Svolgere i seguenti limiti applicando il Teorema di De L'Hopital:

   (a) $\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{\cos x}{\sin x} \right)$

   (b) $\lim_{x\to 0} \frac{2 - x^2 - 2\cos x}{x^4}$

   (c) $\lim_{x\to\infty} \frac{e^{\sqrt{x}}}{x^2}$

   (d) $\lim_{x\to 0} \left(\cot^2(x) - \frac{1}{x^2} \right)$

   (e) $\lim_{x\to 0} \frac{x - \arctan x}{x - \sin x}$

   (f) $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1-x) - x}{1 - \cos x}$

   (g) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x}{e^{-x} - 1 + x}$

   (h) $\lim_{x\to 0} (\sin x)^{\tan x}$

   (i) $\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\ln(\cos(x) - 1)}$

   (j) $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln^4 x}{x}$

   (k) $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x+3} - 1}{4(2x+5)^{\frac{1}{3}} + 7}$

   (l) $\lim_{x\to 0} (e^x + x)^{\frac{1}{x}}$

   (m) $\lim_{x\to 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{x}{x-1} \right)$

   (n) $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} (2x - \pi)\tan x$

3. Dimostrare che $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ si ha che $\lim_{x\to\infty} x^\alpha e^{-x} = 0.$

4. Scrivere lo sviluppo di Taylor, in $x_0 = 0$, delle seguenti funzioni:

   (a) e^{-x^2}

   (b) $\ln(1 + x^2)$

   (c) $\frac{1}{1+x^3}$

   (d) $x^2 \ln(1 - x)$

   (e) 2^{x-1}

   (f) $\frac{1}{\sqrt{4-x^3}}$

5. Scrivere fino al termine x^5 incluso lo sviluppo di Taylor, in $x_0 = 0$, di:

   (a) $\ln(1 + \sin x)$

   (b) $\frac{x - \sin x}{x^2}$

6. Utilizzando gli sviluppi delle funzioni elementari verificare che :

   (a) $\sin^2 x = x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^5)$

   (b) $\frac{1}{1+e^x} = \frac{1}{2} - \frac{x}{4} + o(x^2)$

   (c) $\ln(\cos x) = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + o(x^4)$

   (d) $e^{\sin x} = 1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + o(x^4)$

7. Svolgere i seguenti limiti basandosi sugli sviluppi in serie di Taylor :

   (a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{3\arctan(x)+\sin^2(x)(1-\cos(2x))}{27x^4+5\sin x}$

   (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\cos x[\cos(5\tan x)-\cos(5\sin x)]+5x^4}{2x^4+\sin(x^5)-x^6}$

   (c) $\displaystyle\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{1+\sin x\cos x-\sin x-\cos x}{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2}$

   (d) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{e^x\ln(1+x)\cos x-\sin x}{\sin x\tan x}$

   (e) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{12((1+4x)^{\frac{1}{3}}+(1-3x)^{\frac{1}{4}}-2)-7x}{\cos(x)-1}$

   (f) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{3x\cos(2x)+6\ln(1+x^3)}{x^2}$

8. Studiare massimi e minimi delle seguenti funzioni negli intervalli indicati:

   (a) $\frac{x}{x^2+1}$ in $[-2,3]$

   (b) $ax^2+\frac{b}{x}$ in $(0,+\infty)$

   (c) $x^n e^{-x}$, $n\geq 0$, in $[0,+\infty)$

   (d) $\sin|x|-|\sin x|$ in $[-10,10]$

   (e) $(x^2-8)e^{-x}$ in $[3,+\infty)$

   (f) $\begin{cases} \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) & x\in[-1,0) \\ 1+x-x^2 & x\in[0,1] \end{cases}$

   (g) $2xe^{1-\frac{x}{2}}$ in $(-\infty,+\infty)$

   (h) $\ln(\sin x)-2\sin x$ in $(0,\frac{\pi}{2}]$

   (i) x^p+x^{-q}, $p,q>0$, in $(0,+\infty)$

9. Calcolare i massimi e i minimi relativi delle seguenti funzioni:

   (a) $x^2(x+2)^2$

   (b) $\frac{x^2}{x^3+4}$

   (c) $x-\arctan x$

   (d) $x-\ln(2+x)$

   (e) $\sin^4 x+\cos^4 x$

   (f) $\frac{x}{\sqrt{x^2-4x}}$