Universitá degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di AM120

A.A. 2012-2013 - Docente: Prof. G.Mancini

Tutori: Francesco Mazzarani ed Emanuele Padulano

Tutorato 12 - 23 Maggio 2013

Teorema: Siano f_n e f continue su (a,b), con $-\infty \leq a < b \leq +\infty$. Supponiamo che:

- $f_n \longrightarrow f$ uniformemente $\forall [\alpha, \beta] \subset (a,b)$;
- Esista g continua su (a,b), $g \geq 0$, tale che $|f_n(x)| \leq g(x)$ $\forall n \geq \bar{n}$, $\forall x \in (a,b)$, con $\int_a^b g(x)\ dx < +\infty$ **(EQUIDOMINATEZZA)**.

Allora

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(x)\ dx = \int_a^b f(x)\ dx.$$

1. Calcolare:

   (a) $\displaystyle \lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{nx^2 e^{-nx^2}}{1+nx}\ dx$ (b) $\displaystyle \lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n+x}\ dx$

2. Discutere convergenza puntuale ed uniforme di $f_n(x) = n\sin\left(\frac{x}{n}\right)$, $g_n(x) = \frac{nx}{x^2+n^2}$ ed $h_n(x) = \frac{e^{-nx}}{n^2+x^2}$.
   Stabilire se:
   - $\displaystyle \lim_{n\to+\infty} \int_0^{13} f_n(x)\ dx = \int_0^{13} \lim_{n\to+\infty} f_n(x)\ dx$
   - $\displaystyle \lim_{n\to+\infty} \int_0^{\infty} g_n(x)\ dx = \int_0^{\infty} \lim_{n\to+\infty} g_n(x)\ dx$
   - $\displaystyle \lim_{n\to+\infty} \int_0^{1} h_n(x)\ dx = \int_0^{1} \lim_{n\to+\infty} h_n(x)\ dx$

3. Calcolare $\displaystyle \lim_{n\to+\infty} \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{ne^x \arctan(nx)}{n^2x^2+1}\ dx.$

4. Calcolare i seguenti integrali definiti:

   (a) $\displaystyle \int_0^2 \frac{\log(2x+1)}{(2x+1)^2}\ dx$ (c) $\displaystyle \int_9^{16} \frac{\sqrt{x}-3}{x-3\sqrt{x}+2}\ dx$

   (b) $\displaystyle \int_0^1 \frac{x-1}{x^2-4}\ dx$ (d) $\displaystyle \int_0^{\sqrt{3}} |x-1| \arctan x\ dx$

5. Calcolare:
   - L'area compresa tra $f(x) = (x-1)\log(x^2+4)$ e l'asse x, per $x \in [0,1]$;
   - L'area compresa tra $g(x) = \frac{e^x - e^{2x}}{1+e^{2x}}$ e l'asse x, per $x \in \left[-\log(\sqrt{3}), \log(\sqrt{3})\right]$.

6. Svolgere i seguenti integrali indefiniti:

(a) $\displaystyle\int \frac{x\ dx}{(x+1)(x+3)(x+5)}$

(b) $\displaystyle\int \frac{x-1}{(x^2+2x+3)^2}\ dx$

(c) $\displaystyle\int \frac{x^3-6}{x^4+6x^2+8}\ dx$

(d) $\displaystyle\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\ \frac{dx}{x^2}$

(e) $\displaystyle\int \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\ dx$

(f) $\displaystyle\int \frac{\sin^2 x}{1+\cos^2 x}\ dx$

(g) $\displaystyle\int \frac{dx}{4-5\sin x}$

(h) $\displaystyle\int \frac{dx}{(1+\cos x)^2}$

7. Discutere la convergenza dei seguenti integrali:

(a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\log(1+\sqrt{x})}{\sin x}\ dx$

(b) $\displaystyle\int_3^{+\infty} \frac{x\ dx}{\sqrt{2x^3+3x^2-6x-9}}$

(c) $\displaystyle\int_4^5 \frac{1-3x}{\sqrt{x}-2}\ dx$

(d) $\displaystyle\int_0^2 \frac{\cos x}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}\ dx$

(e) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x\sin x}$

(f) $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x^4-1}}$

8. Studiare la convergenza puntuale ed uniforme delle seguenti serie di funzioni nell'intervallo indicato:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n\log\left(\frac{n+x}{n}\right)}{(x+n)^2}$, per $x \in [0,2]$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin\left(\frac{x}{n}\right)}{n+x^2}$, per $x \in \mathbb{R}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{1+(x-n)^2}$, per $x \geq 0$

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{1+n^2x^2}$, per $x \leq -1$