2013-AM120: Settimana 12

INTEGRALI E SERIE

Sia $f :\to [1,+\infty)$ localmente integrabile. Dalla additivitá dell'integrale:

$$\int_1^{+\infty} |f| = \lim_{n\to+\infty} \int_1^{n+1} |f| = \lim_{n\to+\infty} \sum_{j=1}^{n} \int_j^{j+1} |f| = \sum_{j=1}^{\infty} \int_j^{j+1} |f|$$

Dunque $|f|$ é integrabile su $[1,+\infty)$ se e solo se la serie $\sum\limits_{j=1}^{+\infty} \int\limits_j^{j+1} |f|$ converge e

$$\int_1^{+\infty} |f| = \sum_{j=1}^{+\infty} \int_j^{j+1} |f|$$

Analogamente, da $\int\limits_1^x f = \int\limits_1^{[x]} f + \int\limits_{[x]}^x f = \sum\limits_{j=1}^{[x]-1} \int\limits_j^{j+1} f + \int\limits_{[x]}^x f,$ segue che f é integrabile in senso improprio su $[1,+\infty)$ sse la serie $\sum\limits_{j=1}^{+\infty} \int\limits_j^{j+1} f$ converge, e in tal caso

$$\int_1^{+\infty} f = \sum_{j=1}^{\infty} \int_j^{j+1} f$$

Il caso di funzioni non negative e decrescenti

Proposizione *Sia $f \geq 0$ non crescente (e quindi localmente integrabile) in* $[1,+\infty)$. *Allora*

$$\clubsuit \qquad \sum_j f(j) < +\infty \quad \Leftrightarrow \quad \int_1^{+\infty} f < +\infty \qquad \clubsuit$$

$$\spadesuit \quad f(1)+\ldots+f(n) = \int_1^{n+1} f(x)dx + \sum_1^{+\infty} \left(f(n) - \int_n^{n+1} f \right) + O(f(n+1)-f(\infty)) \quad \spadesuit$$

Prova di $\clubsuit$ Segue da $f(j+1) \leq \int\limits_j^{j+1} f \leq f(j), \quad \forall j \in \mathbf{N}$.

Prova di $\spadesuit$ Da $f(j+1) \leq \int\limits_j^{j+1} f \leq f(j) \quad \forall j \in \mathbf{N}$ segue che la serie $\sum\limits_1^{+\infty} \left(f(n) - \int\limits_n^{n+1} f \right)$ é a termini positivi. Inoltre tale serie converge, perché

$$\sum_{j=n+1}^{+\infty}\left(f(n)-\int_n^{n+1} f\right) \le \sum_{j=n+1}^{+\infty}[f(j)-f(j+1)] = f(n+1)-f(\infty) = \circ(1)\,.$$
Dunque ♠ segue da

$$f(1)+\ldots+f(n) = \int_1^{n+1} f(x)dx + \sum_{j=1}^{n}\left(f(j)-\int_j^{j+1} f\right)$$

NOTA. Se $f_1(1)=0, \quad f_1' \ge 0, \quad f_1'' \le 0 \quad$ in $[1,+\infty)$, allora

posto $f(x) := f_1(x+1) - \displaystyle\int_x^{x+1} f_1(t)dt$, é $f \ge 0,\ f' \le 0$ in $[1,+\infty)$ giacché

$\exists \xi \in [x, x+1]: \quad f(x) = f_1(x+1) - \int_x^{x+1} f_1(t)dt = f_1(x+1) - f_1(\xi) \ge 0$ (Teorema della media e monotonia di f_1) mentre TFC, Lagrange e monotonia di f_1' danno $\exists \xi \in [x, x+1] : f'(x) = f_1'(x+1) - [f_1(x+1) - f_1(x)] = f_1'(x+1) - f_1'(\xi) \le 0$. Quindi ♠ si applica ad f ottenendo

$$\spadesuit\spadesuit \qquad f_1(1)+\ldots+f_1(n) = \int_1^n f_1(x)dx + \sum_{j=1}^{n-1}\left(f_1(j+1)-\int_j^{j+1} f_1\right) =$$

$$\int_1^n f_1(x)dx + \sum_{j=1}^{n-1} f(j) \stackrel{\spadesuit}{=} \int_1^n f_1(x)dx + \int_1^n f(x)dx + c + \circ(1) \qquad \spadesuit\spadesuit$$

ove $\quad c := \sum_{n=1}^{+\infty}\left(f(n) - \int_n^{n+1} f\right), \quad \circ(1) := f(n+1) - f(\infty)$.

ESEMPI di uso di ♣

1. Sia $f(x) = \frac{1}{x^r}$. Siccome $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^r}dx < +\infty$ se e solo se $r > 1$ la serie (armonica generalizzata) $\sum_n \frac{1}{n^r}$ converge se e solo se $r > 1$.

2. $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x(\log x)^r} < +\infty$ se e solo se $r > 1$, e quindi la serie $\sum_n \frac{1}{n(\log n)^r}$ converge se e solo se $r > 1$.

La formula ♠ puó essere utilizzata per stimare:

I) la rapiditá con cui diverge la somma parziale di una serie divergente
II) la rapiditá con cui converge a zero il resto n-esimo di una serie convergente.

ESEMPI di uso di ♠

1. Comportamento asintotico di $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$:

$$\exists \gamma > 0 : \quad 1 + \frac{1}{2} + \ldots \frac{1}{n} \ = \ \log(n+1) \ + \gamma \ + \ O(\frac{1}{n})$$

($\gamma \ := \ \sum\limits_{1}^{+\infty} (\frac{1}{n} \ - \ \log \frac{n+1}{n}) \ < \ +\infty$ si chiama **costante di Eulero-Mascheroni**)

2. Comportamento asintotico del fattoriale (**formula di Stirling**):

$$n! \ = \ \frac{n^{n+\frac{1}{2}}}{e^n} \left(\sqrt{2\pi} + O(\frac{1}{n}) \right)$$

1. Sia $f(x) = \frac{1}{x}$, cosicché $1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n} \ = \ f(1)+\ldots+f(n) \ = \ \int\limits_{1}^{n+1} \frac{dx}{x} + \gamma + O(\frac{1}{n}) \ = \log(n+1) + \gamma + O(\frac{1}{n})$.

2. Proviamo, usando ♠♠, che

$$\exists b \in (0, +\infty) : \qquad \frac{n! \ e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}} \rightarrow_{n \to \infty} \ b$$

Si ha

$$\log n! = \log 2 + \ldots + \log n \ = \ f_1(1) + \ldots + f_1(n) \qquad \textit{ove} \qquad f_1(x) := \log x$$

É $\quad f_1(1) = 0, \quad f_1' \geq 0, \quad f_1'' \leq 0 \quad$ e quindi si puó applicare ♠♠ :

$$\log n! = \int\limits_{1}^{n} f_1(x) dx \ + \int\limits_{1}^{n} f(x) dx \ + \ c + \circ(1) \qquad \textit{ove} \quad f_1(x) = \log x$$

$$f(x) \ := \ \log(x+1) \ - \int\limits_{x}^{x+1} \log t dt \ = \ 1 \ - \ x \log(1 + \frac{1}{x}) > 0, \quad \forall x > 0$$

Siccome $\int\limits_{1}^{n} \log(x) dx \ = \ n \log n - n + 1,$ si ha intanto

$$\log n! = \ n \log n - n + 1 + \int\limits_{1}^{n} f(x) dx \ + \ c + f(n) - f(\infty)$$

Per stimare $\int\limits_1^n f(x)dx$ osserviamo che la formula di Mac Laurin per $\log(1+s)$ fornisce, per $x = \frac{1}{s}$ grande,

$$f(x) = 1 \, - \, x\log(1+\frac{1}{x}) = 1 - x\left[\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + O(\frac{1}{x^3})\right] = \frac{1}{2x} + O(\frac{1}{x^2}) \qquad (*)$$

e quindi $f = O(\frac{1}{x})$, $f(x) - \frac{1}{2x} = O(\frac{1}{x^2})$ per $x \to +\infty$. In particolare f é assolutamente integrabile su $[1, +\infty)$ e, piú precisamente, $\int\limits_n^\infty |f(x) - \frac{1}{2x}]dx \leq \frac{c}{n}$. Ma allora,

$$\int\limits_1^n f(x)dx = \int\limits_1^n \frac{1}{2x}dx + \int\limits_1^n [f(x) - \frac{1}{2x}]dx = \log\sqrt{n} + \int\limits_1^\infty [f(x) - \frac{1}{2x}]dx + O(\frac{1}{n})$$

Riassumendo, esiste una costante C tale che

$$\log n! = \, n\log n - n + \log\sqrt{n} + C + O(\frac{1}{n})$$

e quindi

$$n! = e^{\, n\log n - n + \log\sqrt{n}} \; e^{C + O(\frac{1}{n})} \; = \; \frac{\sqrt{n}\, n^n}{e^n}\left(e^C + O(\frac{1}{n})\right) \qquad b := e^C = \lim_n \frac{n!\, e^n}{n^n\sqrt{n}}$$

Un calcolo esatto di b si puó ottenere usando la formula di Wallis, che assicura che

$$\sqrt{\pi} = \frac{2n!!}{2n-1!!\,\sqrt{n}}\left(1 + O(\frac{1}{n})\right)$$

per cui $\quad b = \frac{b^2}{b} =$

$$\lim_n \left[\frac{(n!)^2 e^{2n}}{n^{2n+1}} \times \frac{(2n)^{2n+\frac{1}{2}}}{(2n)! e^{2n}}\right] = \sqrt{2}\lim_n \frac{(n!)^2\, 2^{2n}}{\sqrt{n}\ (2n)!} = \sqrt{2}\lim_n \frac{(2n!!)^2}{\sqrt{n}\ (2n-1)!!2n!!} = \sqrt{2\pi}$$

Esempio di II) Sia f integrabile. Da ♠ : $\sum_{j=1}^n f(j) = \int\limits_1^{n+1} f + c + O(f(n))$ segue che $\sum_j f(j) = \int_1^\infty f + c$ e quindi

$$\sum_{j\geq n} f(j) = \int\limits_{n+1}^\infty f \, + \, O(f(n))$$

ESEMPIO. Sia $r > 1$. Allora $\sum_{j\geq n}\frac{1}{j^r} \; = \; \frac{1}{(r-1)n^{r-1}} \; + \; O(\frac{1}{n^r})$.

Esercizio. Provare che $\exists c > 0 : \; \sum_{j=2}^n \frac{1}{n\log n} \; = \; \log[\log(n+1)] \; + \; c \; + \; \circ(1)$.

INTEGRALI IMPROPRI PER FUNZIONI NON LIMITATE
e/o
SU INTERVALLI NONLIMITATI

Sia $a \geq -\infty$, f integrabile in $(a, b-\delta]$ per ogni δ piccolo. f si dice integrabile in senso improprio (o in senso generalizzato) in $(a, b]$ se

$$\lim_{x \to b^-} \int_a^x f \quad \text{esiste finito, e} \qquad \int_a^b f \;:=\; \lim_{x \to b^-} \int_a^x f$$

é l'integrale improprio (o in senso generalizzato) di f su $[a, b]$.
Definizione analoga di $\int_a^b f$ se f é integrabile in $[a+\delta, b)$, $b \leq +\infty$ per ogni δ piccolo.
Poi, dato un intervallo aperto (eventualmente illimitato, superiormente e/o inferiormente) I, $x_0 \in I$, f integrabile in $(\inf I, x_0 - \delta]$ ed in $[x_0 + \delta, \sup I)$ per ogni δ piccolo, diremo che f é integrabile in senso improprio su I se lo é in $(\inf I, x_0]$ ed in $[x_0, \sup I)$ e scriveremo

$$\int_{\inf I}^{\sup I} f := \int_{\inf I}^{x_0} f + \int_{x_0}^{\sup I} f$$

ESEMPI .

a) $\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha}\, dt \;<\; +\infty \quad \Leftrightarrow \quad \alpha < 1, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{|t|^\alpha} \;=\; +\infty \quad \forall\, \alpha$

b) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}} \;=\; \pi.$ Infatti, $\int_\delta^R \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}} = \int_{\sqrt{\delta}}^{\sqrt{R}} \frac{2dt}{(1+t^2)} =$
$2(\arctan\sqrt{\delta} \;-\; \arctan\sqrt{R}) \;\Rightarrow\; \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}} := \lim_{\delta\to 0}(\lim_{R\to+\infty} \int_\delta^R \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}) = \pi.$

c) **Integrale di Gauss:** $(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx)^2 = (\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt)^2 \overset{!?!}{=} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}} = \pi$
La prima ugulianza segue dalla paritá e dal cambio $x^2 = t$. Per vedere la seconda, osserviamo che, usando il cambio $t := \tau\theta$, troviamo che $\left(\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt\right)^2 =$

$$\int_0^{+\infty} \left(\frac{e^{-\tau}}{\sqrt{\tau}} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt \right) d\tau \overset{t:=\tau\theta}{=} \int_0^{+\infty} \left(e^{-\tau} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\tau\theta}}{\sqrt{\theta}} d\theta \right) d\tau = \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\tau(1+\theta)}}{\sqrt{\theta}} d\theta \right) dt$$

$$\overset{?FUBINI?}{=} \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\tau(1+\theta)}}{\sqrt{\theta}} d\tau \right) d\theta \;=\; \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{\theta}} \int_0^{+\infty} e^{-\tau(1+\theta)} d\tau \right) d\theta \;=\; \int_0^{+\infty} \frac{d\theta}{(1+\theta)\sqrt{\theta}}$$

c) $f_\alpha(x) = \frac{\sin(\log^2 t)}{t^\alpha}$, $t \in (0,1]$ é assolutamente integrabile se $\alpha < 1$, integrabile se $\alpha = 1$, e $\int\limits_0^1 |f_\alpha| = +\infty$ se $\alpha \geq 1$.

Infatti, effettuando il cambio $\log^2 t = x$, l'integrale (su $[\epsilon, 1]$) diventa $\int\limits_0^{\log^2 \epsilon} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} e^{(\alpha-1)\sqrt{x}} dx$. Se $\alpha < 1$, il decadimento esponenziale assicura assoluta integrabilitá. Se $\alpha = 1$, si vede che il limite, per ϵ che va a zero, esiste finito, mentre $\int\limits_0^\infty |\frac{\sin x}{\sqrt{x}}| dx = +\infty$ (argomentare come per $\int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$). A maggior ragione, $\int\limits_0^1 |f_\alpha| = +\infty$ se $\alpha > 1$.

d) (**Integrali di Fresnel**)) Sia $f(t) = \sin(\frac{\pi}{2} t^2)$. f é integrabile in senso improprio su tutto $\mathbf{R}$ perché, effettuando il cambio di variabile $\frac{\pi}{2} t^2 = s$, si trova

$$\int\limits_0^x \sin(\frac{\pi}{2} t^2) dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2} x^2} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt$$

che ha limite (finito) per R che va all'infinito, come si vede effettuando una integrazione per parti. Di piú, tale limite é positivo. Infatti, usando il cambio $s := t - \pi$, si trova

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt = \lim_n \sum_{k=1}^n \left[\int\limits_{(2k-2)\pi}^{(2k-1)\pi} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt + \int\limits_{(2k-1)\pi}^{2k\pi} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt \right] =$$

$$\lim_n \sum_{k=1}^n \left[\int\limits_{(2k-2)\pi}^{(2k-1)\pi} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt + \int\limits_{(2k-2)\pi}^{(2k-1)\pi} \frac{\sin(s+\pi)}{\sqrt{s+\pi}} ds \right] = \sum_{k=1}^\infty \int\limits_{(2k-2)\pi}^{(2k-1)\pi} \sin t \left[\frac{1}{\sqrt{t}} - \frac{1}{\sqrt{t+\pi}} \right] dt$$

che é serie a termini positivi ed infatti convergente perché il termine k-esimo é maggiorato da $\frac{1}{k\sqrt{k}}$. Siccome f é pari, é anche $\int\limits_{-\infty}^0 \sin(\frac{\pi}{2} t^2) dt = \int\limits_0^{+\infty} \sin(\frac{\pi}{2} t^2) dt$. Si puó piú precisamente provare che

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \sin(\frac{\pi}{2} t^2) dt = 2 \int\limits_0^{+\infty} \sin(\frac{\pi}{2} t^2) dt = 1, \qquad \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

Proposizione (condizione di Cauchy).

(i) $\int\limits_a^b |f| < +\infty \iff \forall \epsilon > 0, \exists \delta_\epsilon : \; b - \delta \leq x_1 < x_2 < b \Rightarrow \int\limits_{x_1}^{x_2} |f| \leq \epsilon$

(ii) $\int\limits_a^b f$ esiste $\iff \forall \epsilon > 0, \exists \delta_\epsilon : \; b - \delta \leq x_1 < x_2 < b \Rightarrow |\int\limits_{x_1}^{x_2} f| \leq \epsilon$

Dimostrazione. (i) É la condizione di Cauchy perché esista finito il limite, per x tendente a b da sinistra, di $F(x) := \int_a^x |f|$ giacché $F(x_2) - F(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} |f|$.

(ii) Come in (i)

Teorema del Confronto.

(i) $\exists \delta > 0 : \ |f(x)| \leq g(x) \ \ \forall x \in [b-\delta, b), \ \int_a^b g < +\infty \ \Rightarrow \ \int_a^b |f| < +\infty$

(ii) $\exists \delta > 0 : \ f(x) \geq g(x) \geq 0 \ \ \forall x \in [b-\delta, b), \ \int_a^b g = +\infty \ \Rightarrow \ \int_a^b |f| = +\infty$

Corollario A. Sia f integrabile in $[a, x], \ \ \forall x < b$.

(i) $\exists M, \delta > 0, \ \alpha < 1 : \ |f(x)| \leq \frac{M}{|x-b|^\alpha} \ \ \forall\, x \in [b-\delta, b) \ \Rightarrow \ f$ é integrabile in $[a, b]$

(ii) $\exists M, \delta > 0, : \ |f(x)| \geq \frac{M}{|x-b|} \ \ \forall\, x \in [b-\delta, b) \ \Rightarrow \ \int_a^b |f| = +\infty$

Corollario B: integrabilitá e comportamento asintotico.

(i) $\exists \alpha < 1 : \ |x-b|^\alpha |f(x)| \to_{x \to +\infty} c < +\infty \ \Rightarrow \ f$ integrabile

(ii) $: \ |(x-b)\, f(x)| \to_{x \to +\infty} c > 0 \ \Rightarrow \ \int_a^{+\infty} |f| = +\infty$

PASSAGGIO AL LIMITE SOTTO SEGNO DI INTEGRALE

Siano $f_n \in C((a, b)), \quad f_n \to_n f$ in (a, b), $-\infty \leq a < b \leq +\infty$. Supponiamo che:

(i) la convergenza é uniforme su ogni $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$

(ii) $\exists g : \ |f_n(x)| \leq g(x) \ \ \forall n, \ x$ con $\int_a^b g < +\infty$ (**equidominatezza**)

Allora
$$\lim_n \int_a^b f_n = \int_a^b \lim_n f_n$$

Prova. Fissato $\epsilon > 0$, esistono $a_\epsilon < b_\epsilon$ in (a, b) e n_ϵ tali che

$$\int_a^{a_\epsilon} g + \int_{b_\epsilon}^b g \leq \frac{\epsilon}{8}, \qquad \sup_{t \in [a_\epsilon, b_\epsilon]} |f_n(t) - f(t)| \leq \frac{\epsilon}{2} \quad \forall n \geq n_\epsilon$$

e quindi

$$\left|\int_a^b f_n(t)dt - \int_a^b f(t)dt\right| \le 2\int_a^{a_\epsilon} g + 2\int_{b_\epsilon}^b g + \int_{a_\epsilon}^{b_\epsilon} |f_n(t) - f(t)|dt \le \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2}$$

Corollario

$$f_n \in C([a,b]), \quad f_n \to_n f \text{ uniformemente in } [a,b] \ \Rightarrow \ \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n \ = \ \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n$$

NOTA. **In generale**, $\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n \neq \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n$.

Esempio 1. Sia $f(x) := \frac{x}{1+x^4}$. Si ha che $f_n(x) := nf(nx) = \frac{n^2x}{1+n^4x^4} \to_n 0 \ \forall x \in R$ ma $\int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^n f \to \int_0^\infty \frac{xdx}{1+x^4} \neq 0$ mentre $\int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n = 0$.
In questo esempio la f_n non converge uniformemente in $[0,1]$. Converge peró uniformemente in $[\delta, 0] \, \forall \delta \in (0,1)$. Evidentemente f_n non é equidominata.
Esempio 2. Se $f \in C(\mathbf{R})$ é limitata ed integrabile in $\mathbf{R}$ con $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, dt \neq 0$, é

$$f_n(x) := \frac{1}{n} f(\frac{x}{n}) \to_n 0 \quad \text{uniformemente in} \quad \mathbf{R} \quad \text{ma} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt \neq 0$$

Evidentemente f_n non é equidominata.

Il limite delle derivate é la derivata del limite).

Siano $f_k \in C^1(I), I$ intervallo aperto. Supponiamo f_k convergano puntualmente a f in OI, e che f'_n convergano uniformemente a g in ogni $[a,b] \subset I$. Allora

$$f \in C^1(I) \qquad \text{e} \qquad f' = g = \lim_k f'_k$$

Dimostrazione. Il Teorema Fondamentale del Calcolo assicura che

$$f_n(x) \ = \ f_n(x_0) + \int_{x_0}^x f'_n(t)dt$$

In virtú della uniforme convergenza delle derivate, passando al limite si ottiene

$$f(x) \ = \ f(x_0) + \int_{x_0}^x g(t)dt$$

Ora, g, limite uniforme di una successione di funzioni continue, é continua. Per il TFC f é derivabile e $f' = g$.