# AM120: Settimana 10

## DEFINIZIONE DI INTEGRALE ESTESO AD UN INSIEME

Sia $A \subset \mathbf{R}$. Diremo che *$f$ é integrabile su $A$ se $f\chi_A$ é integrabile* e scriveremo

$$\int_A f := \int_{\mathbf{R}} f\chi_A \qquad \text{(integrale di f su A)}$$

*NOTA. Se $f$ é solo definita in $A$, la intenderemo definita su tutto $\mathbf{R}$ con $f \equiv 0$ in $A^c := \{x : x \notin A\}$.*
Diremo che $f$ é *localmente integrabile* se $f$ é integrabile su $[-R, R]$ $\quad \forall\, R > 0$.

**Definizione di insieme misurabile e della sua misura**
Diremo che $A$ é misurabile se $\chi_A$ *é integrabile* (ovvero se $A$ é limitato e $\partial A$ ha misura nulla) e scriveremo

$$|A| = \text{misura di A} := \int_{\mathbf{R}} \chi_A \qquad (\,|I| \;=\; l(I)\,!)$$

Dunque, una $f$ *integrabile é integrabile su ogni insieme misurabile.* Piú in generale, ogni funzione localmente integrabile é integrabile su ogni insieme misurabile.

NOTA. (i) Un insieme (limitato) di misura nulla non é necessariamente misurabile (ad esempio $\mathbf{Q} \cap [0, 1]$ é di misura nulla ma non é misurabile!).

$$(ii) \quad E \quad \text{misurabile} \quad \text{con} \quad |E| = 0, \quad f \quad \text{localmente integrabile} \quad \Rightarrow \quad \int_E f = 0$$

perché $|\int_{\mathbf{R}} f\chi_E| \;\le\; \sup_{\mathbf{R}} |f| \int_{\mathbf{R}} \chi_E \;=\; 0$. In particolare, se $f$ é integrabile, e $I = [a, b]$, $a < b$, $J = (a, b)$, allora $\int_I f = \int_J f$, perché $\int_I f = \int_{\mathbf{R}} f\chi_{[a,b]} = \int_{\mathbf{R}} f\chi_{(a,b)} + \int_{\mathbf{R}} f\chi_{\{a,b\}} = \int_{\mathbf{R}} f\chi_{(a,b)}$. É $\int_I f = \int_J f$ anche se $J = [a, b)$ o $J = (a, b]$.

**Osservazione**. 1. Se $A \subset E$ sono insiemi misurabili ed $f$ é integrabile su $E$ allora lo é anche su $A$, ovvero, se $f\chi_E$ é integrabile, allora $f\chi_A$ é integrabile. Infatti $f\chi_A = f\chi_E\chi_A$ é integrabile perché prodotto di funzioni integrabili.

**Proposizione** . Sia $f$ integrabile sull'insieme misurabile $A$. Allora

$$|\int_A f| \;\le\; \left(\sup_A |f|\right)\; |A|$$

Infatti $\quad |\int_A f| = |\int_{\mathbf{R}} f\chi_A| \leq \sup_A |f| \int_{\mathbf{R}} \chi_A l(I) = \sup_A |f|\,|A|.$

**Integrabilitá locale delle funzioni monotone limitate.**

*Sia $f$ limitata e monotona in $[a,b]$. Allora $f$ é integrabile in $[a,b]$.*

Prova. Possiamo supporre $f$ non decrescente, cosicché

$$f(\inf I) \leq \inf_I f, \qquad \sup_I f \leq f(\sup I) \qquad \forall I \subset [a,b]$$

Se $[a,b] = \bigcup_{j=1}^n I_j$ unione 'quasi' disgiunta, con $l(I_j) = \frac{b-a}{n}$, $\quad \sup I_j = \inf I_{j+1}$,

allora $$S(f,I_j) - s(f,I_j) = \sum_{j=1}^n [\sup_{I_j} f - \inf_{I_j} f]\, l(I_j) \leq \frac{b-a}{n} \times$$

$$[f(\sup\ I_1) - f(\inf\ I_1) + f(\sup\ I_2) - f(\inf\ I_2) + \ldots + f(\sup\ I_n) - f(\inf\ I_n)\,]$$
$$= \frac{b-a}{n}\,[f(b) - f(a)] \leq \epsilon \qquad \text{se} \quad n \quad \text{é grande.}$$

**Teorema della media**

Sia $I$ un intervallo chiuso e limitato. Siano $f, g$ continue in $I$, $g(x) \geq 0 \quad \forall x \in I$. Allora
$$\exists \xi \in I: \int_I fg = f(\xi)\int_I g$$
In particolare
$$\exists \xi \in I: \int_I f = f(\xi) l(I)$$
Dimostrazione. Ovviamente $f$ e $g$, prolungate a zero fuori di $I$, sono integrabili, e quindi sono integrabili su $I$. Per il teorema di Weierstrass, $f$ é dotata di minimo e di massimo su $I$, e si ha

$$(\min_I f) g(x)\chi_I(x) \leq f(x)g(x)\chi_I(x) \leq (\max_I f) g(x)\chi_I(x) \quad \forall x \in \mathbf{R}$$

Quindi, passando agli integrali ed usando la linearitá,

$$\min_I f \int_I g \leq \int_I fg \leq \max_I f \int_I g$$

Ora, possiamo supporre $\int_I g > 0$ (altrimenti non c'e niente da dimostrare ) e concludere che $\frac{\int_I fg}{\int_I g} \in [\min_I f, \max_I f]$. La tesi segue allora dal Teorema del valore intermedio.

Per la seconda parte, basta osservare che, presa $g \equiv 1$, $\int_I g = l(I)$

## ADDITIVITÁ DELL'INTEGRALE

Sia $f$ integrabile su $A, B$ insiemi misurabili e tali che $|A \cap B| = 0$. Allora

$$\int_{A \cup B} f = \int_A f + \int_B f$$

Infatti, $\int_{A \cap B} f = 0$ e quindi $\int_{A \cup B} f = \int_{\mathbf{R}} f \chi_{A \cup B} =$

$$= \int_{\mathbf{R}} f(\chi_A + \chi_B - \chi_{A \cap B}) = \int_{\mathbf{R}} f \chi_A + \int_{\mathbf{R}} f \chi_B + \int_{A \cap B} f = \int_A f + \int_B f$$

## INTEGRALI ORIENTATI

Sia $a \leq b$, $f$ una funzione integrabile. Scriveremo anche

$$\int_a^b f := \int_{\mathbf{R}} f \chi_{(a,b)}, \quad \int_b^a f := -\int_a^b f$$

Le proprietá viste finora per $I(f)$ si riscrivono in modo ovvio per gli integrali orientati. Notiamo ad esempio che $f \leq g, a > b \Rightarrow \int_a^b f \geq \int_a^b g$.

Di fondamentale importanza é la seguente riformulazione della additivitá: se $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ é integrabile e $a, b, c \in \mathbf{R}$ allora

$$(\diamond) \qquad \int_a^b f + \int_b^c f + \int_c^a f = 0 \qquad (\diamond)$$

Infatti, se due tra $a, b, c$ coincidono, tale relazione é vera per definizione. Altrimenti, uno dei tre é strettamente compreso tra gli altri due. Diciamo, per fissare le idee, che sia $c$ ad essere compreso tra $a$ e $b$. Quindi $(\diamond)$ si riscrive

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

che é vera perché

$$\int_a^b f = \int_{\mathbf{R}} f \chi_{[a,b]} = \int_{\mathbf{R}} f(\chi_{[a,c)} + \chi_{[c,b]}) =$$

$$= \int_{\mathbf{R}} f \chi_{[a,c)} + \int_{\mathbf{R}} f \chi_{[c,b]} = \int_a^c f + \int_c^b f$$

## IL TEOREMA FONDAMENTALE DEL CALCOLO

**TFC 1**. *Sia $f$ limitata e integrabile in $[a,b]$, $x_0 \in [a,b]$. La funzione*

$$F(x) := \int_{x_0}^{x} f(t)dt \qquad x \in [a,b]$$

*i) é definita e Lipschitziana (e quindi continua) in $[a,b]$*

*ii) é derivabile in $x \in (a,b)$, se $f$ é continua in $x$, ed in tal caso $F'(x) = f(x)$*

Dimostrazione. Usando l'additivitá dell'integrale, si ottiene

$$|F(x) - F(y)| = |\int_{x_0}^{x} f(t)dt - \int_{x_0}^{y} f(t)dt| = |\int_{y}^{x} f(t)dt| \leq \left(\sup_{[a,b]} |f|\right) |x-y|$$

$$F(x+h) = F(x) + \int_{x}^{x+h} f(t)dt + f(x)h - f(x)\int_{x}^{x+h} dt = F(x) + f(x)h + \int_{x}^{x+h} [f(t) - f(x)]dt$$

Ma, $f$ continua in $x \quad \Rightarrow \quad |\int_{x}^{x+h}[f(t)-f(x)]dt| \leq |h| \sup_{\{t:|t-x|\leq|h|\}} |f(t)-f(x)| = \circ(|h|)$
e quindi $F$ é derivabile in $x$ con $F'(x) = f(x)$. Si puó quindi scrivere

$$\frac{d}{dx}\int_{x_0}^{x} f(t)dt = f(x) \qquad \text{in ogni punto } x \text{ in cui } f \text{ é continua.}$$

**Corollario.** *Sia $f$ continua in $[a,b]$. Allora $f$ é dotata di primitiva in $(a,b)$ e*

$$F(x) := \int_{x_0}^{x} f(t)dt \qquad \text{é l'unica primitiva di } f \text{ in } (a,b) \text{ che si annulla in } x_0$$

**NOTA .** Se $\varphi, \psi$ sono derivabili ed $f$ é continua, allora

$$\frac{d}{dx}\int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} f(t)dt = f(\varphi(x))\varphi'(x) - f(\psi(x))\psi'(x)$$

Infatti, se $F(x) := \int_{x_0}^{x} f(t)dt$, dal TFC e dalla regola della catena, segue $\frac{d}{dx}\int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} f(t)dt = \frac{d}{dx}[F(\varphi(x)) - F(\psi(x))] = F'(\varphi(x))\varphi'(x) - F'(\psi(x))\psi'(x) = f(\varphi(x))\varphi'(x) - f(\psi(x))\psi'(x)$.

**TFC 2 (formula di Torricelli-Newton)** .

*Data* $f \in C(I), I$ *intervallo aperto, sia* $P \in C^1(I)$ *primitiva di* $f$. *Sia* $[a,b] \subset I$. *Allora*

$$\int_a^b f \ = \ P \mid_a^b \ := \ [P(b) - P(a)]$$

Dimostrazione. Sia $F(x) = \int_a^x f$. Da $F' \equiv P'$ in $I$, segue che $F(x) - P(x) = F(a) - P(a) = -P(a) \ \forall x \in I$, e quindi $\int_a^b f \ = \ F(b) = P(b) - P(a)$.

NOTA *(Varianti integrali del teorema del valor medio).* Torricelli-Newton (TN) piú Teorema della media assicurano che, se $f \in C^1(I)$ ed $[a,b] \subset I$, allora

$$\exists \xi \in [a,b] : \qquad f(b) - f(a) \ = \ \int_a^b f'(x)\, dx \ = \ (b-a) f'(\xi)$$

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^x f(t)dt \qquad \forall x, x_0 \in I$$

**Alcuni integrali immediati** .

$\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\, dt \ = \ \arctan x \qquad \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\, dt \ = \ \sin^{-1} x = \frac{\pi}{2} - \cos^{-1} x, \quad |x| < 1$

$\int_0^x \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}\, dt \ = \ \sinh^{-1} x = \log(x + \sqrt{x^2+1}) \quad x \in \mathbf{R}$

$\int_1^x \frac{1}{\sqrt{t^2-1}}\, dt \ = \ \cosh^{-1} x = \log(x + \sqrt{x^2-1}) \quad , \forall \ x > 1$

**LA FORMULA DI INTEGRAZIONE PER PARTI** .

Siano $f, g \in C^1([a,b])$. Allora

$$\int_a^b fg' \ = fg|_a^b \ - \int_a^b f'g$$

Dimostrazione. $\int_a^b fg' \ + \ f'g \ = \ \int_a^b (fg)' \ = \ fg|_a^b$.

ESEMPI di integrazione per parti.

$$\int_0^x \sin^2 t\, dt \;=\; \int_0^x \cos^2 t\, dt \;-\; \cos x \sin x \quad \Rightarrow \quad \int_0^x \sin^2 t\, dt \;=\; \frac{1}{2}(x - \sin x \cos x)$$

$$\int_0^x \cos^2 t\, dt \;=\; \frac{1}{2}(x + \sin x \cos x)$$

$$\int_0^x \sinh^2 t\, dt \;=\; -\int_0^x \cosh^2 t\, dt \;+\; \cosh x \sinh x \Rightarrow \int_0^x \sinh^2 t\, dt \;=\; \frac{1}{2}(\sinh x \cosh x \;- x)$$

$$\int_0^x \cosh^2 t\, dt \;=\; \frac{1}{2}(x + \sinh x \cosh x)$$

$$\int_1^x \log t\, dt \;=\; -\int_1^x dt \;+\; t \log t|_1^x = 1 - x + x \log x$$

$$\int_0^x \arctan t dt \;=\; -\int_0^x \frac{t}{1+t^2} dt \;+\; t \arctan t|_0^x = x \arctan x - \frac{1}{2}\log(1+x^2)$$

**INTEGRAZIONE VIA CAMBIO DI VARIABILE** .

Siano $I, J$ intervalli, $\quad \varphi \in C^1(J, I),\ f \in C(I, \mathbf{R})$. $\quad$ Siano $\alpha, \beta \in J$. Allora

*i)* $\quad \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\, dt \;=\; \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x) dx$

Siano $x_1, x_2 \in I$. Se esistono $t_1, t_2 \in J$ tali che $x_1 = \varphi(t_1),\ x_2 = \varphi(t_2)$ allora

*ii)* $\quad \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx \;=\; \int_{t_1}^{t_2} f(\varphi(t))\varphi'(t)\, dt \quad$ e, se $\varphi$ é invertibile,

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x) dx \;=\; \int_{\varphi^{-1}(x_1)}^{\varphi^{-1}(x_2)} f(\varphi(t))\varphi'(t)\, dt.$$

Dimostrazione. $\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\, dt \;=\; \int_\alpha^\beta (\frac{d}{dt} \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(t)} f(x) dx) dt \;=\; \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(t)} f\ |_\alpha^\beta \;=\; \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f.$

ESEMPI di cambi di variabile

$$(i) \quad \int_0^x 2t \cos(t^2)\, dt \overset{\tau=\varphi(t):=t^2}{=} \int_{\varphi(0)}^{\varphi(x)} \cos\tau\, d\tau = \sin x^2, \qquad \int_0^x \sinh t\ \log(\cosh t)\, dt$$

$$\overset{\tau=\varphi(t):=\cosh t}{=} \int\limits_{\varphi(0)}^{\varphi(x)} \log\tau\, d\tau = \int\limits_{1}^{\cosh(x)} \log\tau\, d\tau = 1 - \cosh x + \cosh x \log(\cosh x)$$

$$(ii) \qquad \int\limits_0^y \sqrt{1-x^2}\, dx \overset{x:=\sin t}{=} \int\limits_0^{\sin^{-1} y} \cos^2 t dt = \frac{1}{2}(\sin^{-1} y + y\sqrt{1-y^2})$$

(da cui $\int\limits_0^1 \sqrt{1-x^2}\, dx = \frac{\pi}{4}$).

$$\int\limits_1^x \sqrt{t^2-1}\, dt \overset{t:=\cosh s}{=} \int\limits_0^{\cosh^{-1} x} \sinh^2 s ds =$$

$$= \frac{1}{2}(x\sqrt{x^2-1} - \cosh^{-1} x) = \frac{1}{2}[x\sqrt{x^2-1} - \log(x+\sqrt{x^2-1})]$$

$$\int\limits_0^x \sqrt{t^2+1}\, dt \overset{t:=\sinh s}{=} \int\limits_0^{\sinh^{-1} x} \cosh^2 s ds = \frac{1}{2}(x\sqrt{1+x^2} + \sinh^{-1} x) =$$

$$= \frac{1}{2}[x\sqrt{1+x^2} + \log(x+\sqrt{1+x^2})]$$

$$\int\limits_0^x \frac{dt}{(1+t^2)^n} \overset{t:=\tan s}{=} \int\limits_0^{\arctan x} \frac{1+\tan^2 s}{(1+\tan^2 s)^n}\, ds = \int\limits_0^{\arctan x} \cos^{2n-2}(s) ds$$

**Simmetrie e cambi di variabile negli integrali**

**Funzioni pari, dispari.** Sia $f$ derivabile in $\mathbf{R}$. Si ha che

$$f \quad \text{pari} \quad \Rightarrow f'(-x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(-x+h) - f(-x)}{h} = -\lim_{h\to 0} \frac{f(x-h)-f(x)}{-h} = -f'(x)$$

$$f \quad \text{dispari} \quad \Rightarrow f'(-x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(-x+h) - f(-x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-f(x-h)+f(x)}{-h} = f'(x)$$

cioé, se $f$ é pari *(dispari)* allora $f'$ é dispari *(pari)*. Usando il cambio di variabile $t = -s$, vediamo che vale anche il viceversa:

$f \in C(\mathbf{R})$ pari $\Rightarrow$ $F(x) = \int\limits_0^x f(t)\, dt$ é dispari (ed é anche l'unica primitiva dispari!).
In paricolare, $\int\limits_{-a}^a f = 2\int\limits_0^a f$

$f \in C(\mathbf{R})$ dispari $\Rightarrow$ $F(x) = \int\limits_0^x f(t)\, dt$ é pari. In particolare, $\int\limits_{-a}^a f = 0$.

## APPENDICE

**Funzioni periodiche.** Se $f$, derivabile in $\mathbf{R}$, é $T-$periodica (cioé $f(t+T)=f(t)\ \ \forall\, t$), allora $f'$ é $T$-periodica:

$$f'(x+T)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+T+h)-f(x+T)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x)$$

*Se $f\in C(\mathbf{R})$ é $T$-periodica, allora $F(x)=\int\limits_0^x f(t)\,dt$ é $T$-periodica se e solo se* $\int\limits_0^T f(t)\,dt=0$ (le primitive di $f$ sono $T$-periodiche se e solo se $f$ é *a media nulla*).

Necessitá : $\int\limits_0^T f(t)\,dt=F(T)-F(0)=0.$ La sufficienza segue da

$\frac{d}{dx}\left[\int\limits_0^{x+T} f(t)dt-\int\limits_0^x f(t)dt\right]=f(x+T)-f(x)\equiv 0$ e quindi

$F(x+T)-F(x)=F(T)-F(0)=\int\limits_0^T f(t)\,dt$. Usando il cambio di variabile, ne diamo una prova senza ipotesi di continuitá su $f$:

Posto $t=T+s$, risulta $\int\limits_a^{a+T} f=\int\limits_a^T f+\int\limits_T^{a+T} f(t)\,dt=\int\limits_a^T f+\int\limits_0^a f(T+s)\,ds=\int\limits_0^T f\quad\forall a$ e quindi

$$\int\limits_0^{x+T} f=\int\limits_0^x f+\int\limits_x^{x+T} f=\int\limits_0^x f+\int\limits_0^T f$$

Esercizio. Provare, usando il cambio di variabile $t:=s+\frac{\pi}{2}$, che

$$\int\limits_0^{\pi}\sin^2 t\,dt=\int\limits_0^{\pi}\cos^2 t\,dt=\frac{\pi}{2}$$

INTEGRAZIONE PER PARTI: FORMULE ITERATIVE

1. Se $I_n(x):=\int\limits_0^x t^n e^t\,dt,$ é $I_n(x)=x^n e^x-nI_{n-1}(x)$

2. Se $I_n(x):=\int\limits_0^x t^n e^{-t}\,dt,$ é $I_n(x)=nI_{n-1}(x)-x^n e^{-x}$

3. Se $S_n(x):=\int\limits_0^x \sin^n t\,dt,$ $C_n(x):=\int\limits_0^x \cos^n t\,dt,$ é

$S_n(x)=(1-\frac{1}{n})S_{n-2}(x)-\frac{1}{n}\sin^{n-1}x\cos x,\quad C_n(x)=(1-\frac{1}{n})C_{n-2}+\frac{1}{n}\cos^{n-1}x\sin x$

4. $S_{2n}(\frac{\pi}{2})=\frac{\pi}{2}(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{4})\ldots(1-\frac{1}{2n})\quad S_{2n+1}(\frac{\pi}{2})=(1-\frac{1}{3})(1-\frac{1}{5})\ldots(1-\frac{1}{2n+1}).$