# AM120 2012-2013: I Settimana

## DERIVAZIONE

**1. Derivabilitá e derivata** Sia $f : A \to \mathbf{R}$, $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset A$; $f$ si dice derivabile in $x_0$ se esiste, finito, il limite del rapporto incrementale:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

In tal caso tale limite si chiama derivata di $f$ in $x_0$ e si scrive $f'(x_0)$, $\frac{df}{dx}(x_0)$, $(Df)(x_0)$. Se $f'(x)$ esiste $\forall x \in A$, la $A \ni x \to f'(x)$ é la '(funzione) derivata' di $f$ in $A$.

**Esempi**

Se $f(x) = c \;\; \forall x$, allora $f'(x) = 0$, $\forall x$. Infatti, $\frac{f(x)-f(x_0)}{h} = \frac{c-c}{h} \equiv 0$.

Se $f(x) = e^x$, é $f'(x) = e^x$. Infatti $\frac{e^{x+h}-e^x}{h} = e^x \left(\frac{e^h-1}{h}\right) \to_{h\to 0} e^x$.
Allo stesso modo: $(e^{-x})' = -e^{-x}$.

Se $f(x) = \log x$, é $f'(x) = \frac{1}{x}$. Infatti $\frac{\log(x+h)-\log x}{h} = \frac{\log(1+\frac{h}{x})}{h} \to_{h\to 0} \frac{1}{x}$ .

Se $f(x) = \frac{1}{x}$, é $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$. Infatti $\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{x_0}}{x-x_0} = -\frac{1}{xx_0} \to_{x\to x_0} -\frac{1}{x_0^2}$ .

Se $f(x) = \sin x$, é $f'(x) = \cos x$. Infatti $\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} =$

$$\frac{\sin x \cos h + \sin h \cos x - \sin x}{h} = \sin x \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \frac{\sin h}{h} \to_{h\to 0} \cos x$$

Se $f(x) = \cos x$, é $f'(x) = -\sin x$. Infatti $\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h} =$

$$\frac{\cos x \cos h - \sin h \sin x - \cos x}{h} = \cos x \frac{\cos h - 1}{h} - \sin x \frac{\sin h}{h} \to_{h\to 0} -\sin x$$

(i) La funzione $f(x) = |x|$ non é derivabile in $x = 0$. (ii) Se $f(x) := x^2\chi_{\mathbf{Q}}(x)$, $f'(0) = 0$ ed $f'(x)$ non esiste se $x \neq 0$ ($\chi_{\mathbf{Q}} \equiv 1$ in $\mathbf{Q}$, $\chi_{\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}} \equiv 0$).

NOMENCLATURA Ricordiamo che una funzione $w : (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \to \mathbf{R}$ si dice infinitesima in $x_0$, e si scrive $w(x) = \circ(1)$ in $x_0$ se $\forall \epsilon > 0, \exists \delta = \delta_\epsilon : 0 < |x - x_0| \leq \delta \Rightarrow |w(x)| \leq \epsilon$, ovvero se $w$ tende a zero al tendere di $x$ a $x_0$.
Si dice anche che $w$ é un infinitesimo rispetto ad $h$ (o di ordine superiore al primo) in zero, e si scrive $w = \circ(h)$, se $\lim\limits_{h\to 0} \frac{w(h)}{h} = 0$, ovvero se $w(h) = \circ(1)h$.

**2. Continuitá e differenziabilitá delle funzioni derivabili**

**Se $f$ è derivabile in $x_0$**, allora $f$ é differenziabile in $x_0$, ovvero

$$R(x) := f(x_0 + h) - [f(x_0) + f'(x_0)h] = \circ(h)$$

In particolare $f$ **è continua in** $x_0$. La funzione lineare di $\mathbf{R}$ in se,

$$df(x_0) : h \to f'(x_0)h$$

si chiama **differenziale** di $f$ in $x_0$. Notiamo che $df(x_0)$ é l'unica funzione lineare che approssima $f(x_0+h) - f(x_0)$ a meno di un infinitesimo di ordine superiore al primo. Infatti

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = ah + h \circ (1) \Rightarrow f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \tfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} [a + \circ(1)] = a$$

**3. Derivate di somme, prodotti...**

**(somme e prodotti)** Se $f, g$ sono derivabili in $x_o$, allora lo sono anche $f+g$, $fg$, e

$$(f + g)'(x_o) = f'(x_o) + g'(x_o)$$
$$(fg)'(x_o) = f'(x_o)g(x_o) + f(x_o)g'(x_0)$$

Infatti,

$$\frac{(f + g)(x) - (f + g)(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \to_{x\to x_0} f'(x_0) + g'(x_0)$$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{(fg)(x) - (fg)(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \left[ g(x)\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + f(x_0)\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \right] =$$
$$= f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$$

Esempio. 1. Se $f(x) = x^n$, $f'(x) = nx^{n-1}$. Prova: per induzione.
2. Ricordiamo che $\sinh x := \frac{e^x-e^{-x}}{2}$, $\cosh x := \frac{e^x+e^{-x}}{2}$. Si ha:
$(\sinh x)' := \frac{e^x+e^{-x}}{2} = \cosh x$ $(\cosh x)' = \sinh x$.

Piú avanti proveremo la formula

**(quozienti)** Se $f, g$ sono derivabili in $x_o$ e $g(x_0) \neq 0$ allora lo é anche $\frac{f}{g}$ e

$$(\frac{f}{g})'(x_o) = \frac{f'(x_o)g(x_o) - f(x_o)g'(x_0)}{g^2(x_o)}$$

Esempi.

$D\tan x = D\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = 1+\tan^2 x$

$D\tanh x = D\frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = 1-\tanh^2 x$

**4. Derivata di funzioni composte: la regola della catena**

Se $g$ é derivabile in $x$ e $f$ é derivabile in $g(x)$, allora $f\circ g$ é derivabile in $x$ e

$$(f\circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x)$$

*Prova.* Usando prima la differenziabilitá di $g$ e poi quella di $f$, troviamo

$$f(g(x+h)) = f(g(x)+g'(x)h+\epsilon_1(h)) = f(g(x))+f'(g(x))[g'(x)h+\epsilon_1(h)]+\epsilon_2(k(h))$$

ove $\quad \epsilon_1(h)=\circ(h),\ k(h)=g'(x)h+\epsilon_1(h),\ \epsilon_2(k)=\circ(k)$. Siccome

$$\lim_{h\to 0}\frac{k(h)}{h} = g'(x) \quad \text{e quindi} \quad \lim_{h\to 0}\frac{\epsilon_2(k(h))}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\epsilon_2(k(h))}{k(h)}\ \lim_{h\to 0}\frac{k(h)}{h} = 0$$

concludiamo che $\quad f(g(x+h)) = f(g(x))+f'(g(x))g'(x)h+\circ(h)$.

*Esempi.* $\quad (\frac{1}{f})' = -\frac{f'}{f^2} \qquad (\frac{f}{g})' = \frac{f'g-fg'}{g^2} \qquad (f^n)' = nf^{n-1}f'$

$$(e^f)' = f'e^f \qquad (\ln f)' = \frac{f'}{f} \qquad D\sin(f(x)) = \cos(f(x))Df(x)$$

Sia $\ f>0.\quad (f^g)' = (e^{g\log f})' = f^g(g\log f)'\ $ e quindi, se $g:\equiv\alpha,\quad (f^\alpha)' = \alpha f^{\alpha-1}f'$

**5. Funzione inversa: derivabilitá e derivata**

Sia $f$ iniettiva in $(a,b)$, $f^{-1}: f((a,b))\to(a,b)$ la funzione inversa. Allora:

(i) se $f$ é continua in $x_0$, $f^{-1}$ é continua in $y_0=f(x_0)$

(ii) se $f$ é derivabile in $x_o$, con $f'(x_o)\neq 0$ allora $f^{-1}$ é derivabile in $y_o=f(x_o)$

$$e \qquad (f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$$

**Prova**

(i) Continuitá: sia $y_n \to y$, e sia $x_{n_k} := f^{-1}(y_{n_k})$ convergente, diciamo, a $x$, e quindi $y_{n_k} = f(x_{n_k}) \to f(x)$. Da $y_n \to y$ segue che $f(x) = y$, ovvero $f^{-1}(y_n) \to f^{-1}(y)$.

(ii) Derivabilitá. Per calcolare $\lim_{y\to y_0} \frac{f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)}{y-y_0}$ si puo' utilizzare il cambio di variabile $y = f(x)$: siccome $x \to x_0 \quad \Leftrightarrow \quad f(x) \to f(x_0)$, si ha che

$$\lim_{y\to y_0} \frac{f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)}{y-y_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{f^{-1}(f(x))-f^{-1}(y_0)}{f(x)-y_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{x-x_0}{f(x)-f(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$$

Equivalentemente, posto $\varphi(x) := \frac{x-x_0}{f(x)-f(x_0)}$, risulta $\frac{f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)}{y-y_0} = \varphi(f^{-1}(y))$ e quindi, per il teorema sui limiti di funzioni composte

$$\lim_{y\to y_0} \frac{f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)}{y-y_0} = \lim_{y\to y_0} \varphi(f^{-1}(y)) = \lim_{x\to x_0} \varphi(x) =$$

**Alcune funzioni inverse e le loro derivate**

Se $f(x) = x^n, x > 0$, la sua inversa, $f^{-1}(x) = x^{\frac{1}{n}}, x > 0$ ha per derivata

$$Df^{-1}(x) = \frac{1}{Df(f^{-1}(x))} = \frac{1}{n(f^{-1}(x))^{n-1}} = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}$$

Piú brevemente, da $x = f(f^{-1}(x))$ e dalla regola della catena, si ottiene

$$e^{\ln x} = x \quad \Rightarrow \quad 1 = e^{\ln x}(\ln x)' = x \ln x \quad \Rightarrow \quad (\ln x)' = \tfrac{1}{x}$$

$$f(x) = \tan x, \quad x \in (-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}), \quad f^{-1}(x) = \arctan x \quad \Rightarrow$$

$$1 = D\tan(\arctan x) = 1 + \tan^2(\arctan x) = 1 + x^2 \quad \Rightarrow \quad D \arctan x = \frac{1}{1+x^2}$$

$f(x) = \sin x, \quad x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}), \quad f^{-1}(x) = \arcsin x \quad \Rightarrow$

$1 = D\sin(\arcsin x) = \cos(\arcsin x) D \arcsin x = \sqrt{1 - \sin^2(\arcsin x)} = \sqrt{1-x^2} \quad \Rightarrow$

$$D \arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \text{Allo stesso modo:} \quad D \arccos x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$1 = (\sinh(\sinh^{-1} x))' = \cosh(\sinh^{-1} x))(\sinh^{-1} x)' \Rightarrow$

$$(\sinh^{-1} x)' = \frac{1}{\sqrt{1+\sinh^2(\sinh^{-1} x)}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}. \quad \text{Allo stesso modo:}$$

$$1 = (\cosh(\cosh^{-1} x))' = \sinh(\cosh^{-1} x))(\cosh^{-1} x)' = (\cosh^{-1} x)'\sqrt{\cosh^2(\cosh^{-1} x) - 1}$$

$$\Rightarrow \qquad (\cosh^{-1} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

**6. Derivata a destra, a sinistra**

Sia $\quad f : (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \to \mathbf{R}$.
Se esiste il limite, a destra, del rapporto incrementale:

$$f'_+(x_0) := \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

chiameremo tale limite 'derivata a destra di $f$ in $x_0$'. Analogamente si definisce (se esiste) la derivata a sinistra, indicata $f'_-(x_0)$, . Evidentemente $f$ **é derivabile in $x_0$ se e solo se $f$ ha derivate finite a destra e sinistra e queste sono uguali**.

Esempi.

Se $\quad f(x) = |x| \quad f'_+(0) = 1, \quad f'_-(0) = -1$ .

Se $\quad f(x) = \sqrt{|x|} \quad f'_+(0) = +\infty, \quad f'_-(0) = -\infty$ .

**7. Funzioni di classe $C^1$**

Sia $A$ aperto (cioé $\forall x \in A \exists \delta > 0 : (x - \delta, x + \delta \subset A)$. Una $f$ si dice derivabile in $A$ se é derivabile in ogni punto di $A$. Resta in tal caso definita in $A$ una nuova funzione, la funzione derivata prima, $f'$. Se poi $f' \in C(A)$, ovvero $f'$ é continua in $A$, si scrive $f \in C^1(A)$ e si dice che $f$ é di classe $C^1$ in $A$.

Una funzione derivabile non é in generale $C^1$. Ad esempio

$$f(x) := x^2 \sin\frac{1}{x}, \quad se \quad x \neq 0, \quad f(0) = 0$$

é derivabile con derivata nulla in $x = 0$ perché $\quad \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2 \sin\frac{1}{x}}{x} = 0$ mentre

$$\frac{d}{dx}[x^2 \sin\frac{1}{x}] = 2x \sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$$

non ha limite per $x$ tendente a zero.

## PROPRIETÁ GLOBALI DELLE FUNZIONI DERIVABILI

Qui, $f$ é una funzione continua in $[a,b]$ e derivabile in $(a,b)$.

**Prop.** Se $x_o \in (a,b)$ é punto di minimo (o di massimo), cioé

$$\exists \delta > 0 : \quad f(x_o) \leq f(x) \quad \forall x \in (x_o - \delta, x_o + \delta)$$

(ovvero $f(x_o) \geq f(x)\, \forall x \in (x_o - \delta, x_o + \delta\ ))$, allora $f'(x_o) = 0$.

Infatti, $f(x_o + h) - f(x_o) \geq 0$ se $|h| < \delta$, implica

$$f'(x_o) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_o + h) - f(x_o)}{h} \leq 0 \leq \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_o + h) - f(x_o)}{h} = f'(x_o)$$

.

**Teorema di Rolle** Se $f(a) = f(b)$, allora esiste $x_o \in (a,b)$ tale che $f'(x_o) = 0$.

Infatti, per il teorema di Weierstrass, $\exists \underline{x}$, $\overline{x}$, in $[a,b]$ tali che $f(\underline{x}) \leq f(x) \leq f(\overline{x})$, $\forall x \in [a,b]$. Se $\underline{x}, \overline{x} \in \{a,b\}$, $f$ é costante in $[a,b]$, e quindi a derivata nulla in $[a,b]$. Altrimenti, se, diciamo, $\underline{x} \in (a,b)$, é $f'(\underline{x}) = 0$.

**Il teorema del valor medio, o di Lagrange**. $\exists \xi \in (a,b) : \quad \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi)$.

Segue dal Teorema di Rolle applicato a

$$\phi(x) := f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

**Il teorema degli accrescimenti finiti, o di Cauchy.**

Se $g$ ha le stesse proprietá di $f$, e, in piú, $g'(x) \neq 0$, $\forall x \in (a,b)$, allora

$$\exists \xi \in (a,b) : \ \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

Segue dal Teorema di Rolle applicato a

$$\phi(x) := f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}(g(x) - g(a))$$