AM120 2013: II ESONERO

TEMA 1. Siano $f_n \in C^1(\mathbf{R})$. Provare che

(i) se $f_n \to f$ uniformemente sui limitati allora $f \in C(\mathbf{R})$;
(ii) se $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge totalmente in $\mathbf{R}$ allora converge uniformemente in $\mathbf{R}$ e $S(x) := \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ é funzione continua;
(iii) se $f_n(0) = 0 \quad \forall n \in \mathbf{N}$ e $\sum_{n=1}^{\infty} \sup\limits_{|x|\leq R} |f_n'(x)| < +\infty \quad \forall R > 0$ allora $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge in $\mathbf{R}$ e $S(x) := \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ é derivabile in $\mathbf{R}$ e

$$\frac{d}{dx}\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{df_n}{dx}(x) \qquad \forall x \in \mathbf{R}$$

TEMA 2. Siano $f_n \in C_0(\mathbf{R})$, sia $f(x) := \lim\limits_n f_n(x)$. Provare che se f_n é equidominata e la convergenza é uniforme sugli intervalli limitati allora f é integrabile (eventualmente in senso improprio) su $\mathbf{R}$ e

$$\lim_n \int_{-\infty}^{+\infty} f_n = \int_{-\infty}^{+\infty} f$$

Mostrare con un controesempio che l'ipotesi di equidominatezza é essenziale.

TEMA 3. Sia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ funzione limitata.

Dare la definizione di integrabilitá in senso improprio di f su $\mathbf{R}$.
Provare che se $f \in C(\mathbf{R})$ ed $|f|$ é integrabile in senso improprio su $\mathbf{R}$, allora lo é anche f. Si puó, in tale affermazione, fare a meno della continuitá di f?

Mostrare poi che l'integrabilitá di f in senso improprio non implica l'integrabilitá (in senso improprio) di $|f|$.

Mostrare infine che $f(x) := \sin x^2$ é integrabile (in senso improprio) su $\mathbf{R}$ e che $\int_{-\infty}^{+\infty} \sin x^2 dx > 0$.

TEMA 4. Enunciare e dimostrare il Teorema Fondamentale del Calcolo. Dedurre che, se $f \in C_0(\mathbf{R}) \cap C^1(\mathbf{R})$ e $g \in C^1(\mathbf{R})$ allora

$$\int_{-\infty}^{+\infty} fg' = -\int_{-\infty}^{+\infty} f'g$$

TEMA 5. Enunciare e provare la formula di Stirling.

ESERCIZIO 1. Determinare, laddove esistono, le primitive di almeno due delle seguenti funzioni

$$g_1(x) = \cosh^2 x, \qquad g_2(x) = xe^{-x^2} \qquad g_3(x) = \frac{x-2}{x(x^2-1)}, \qquad g_4(x) = x^2 \sin x$$

Calcolare almeno due tra i seguenti integrali

$$I_1 = \int_0^{3\pi} \cos^2 x dx, \qquad I_2 = \int_{-1}^{2} x \cosh x dx \qquad I_3 = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{x-2}{x(x^2+1)} dx$$

ESERCIZIO 2. Calcolare, se esistono, i seguenti integrali

$$I_1' = \int_{-\infty}^{0} e^x \sin x dx, \qquad I_2' = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\cosh^2 x} \qquad I_3' = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\log(1+x^2)}{x(1+x^2)} dx$$

$$I_4' = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} x^{2n+1} dx$$

ESERCIZIO 3. Sia t un parametro reale. Dire, motivando, per quali valori del parametro t i seguenti integrali esistono

$$I_1' = \int_{\mathbf{R}} \frac{\arctan(e^{-tx}) + \arctan(e^{tx})}{t^2 + x^2} dx, \qquad I_2' = \int_0^{+\infty} \frac{x}{(x+t)^4} dx$$

Calcolare, per i valori di t trovati, tali integrali.

ESERCIZIO 4.

Discutere convergenza puntuale, totale e uniforme della serie di funzioni:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n e^{-n(x^2+x+1)}$$

ESERCIZIO 5. Dire, motivando la risposta, se sono vere le seguenti formule

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^{\infty} n e^{-n^2 x^2} dx = \int_0^{\infty} \left[\lim_{n \to +\infty} n e^{-n^2 x^2} \right] dx$$

$$\int_{-4}^{4} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^4 2^{2n}} x^n \right] dx = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4(2n+1)}$$