Universitá degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Soluzioni Tutorato di AC310

A.A. 2012-2013 - Docente: Prof. Pierpaolo Esposito

Tutori: Dario Giannini e Giulia Salustri

Tutorato 6
30 Novembre 2012

1. Dare un esempio di una funzione f con una singolaritá isolata in 0 tale che $\frac{1}{f}$ non abbia una singolaritá isolata in 0.
SOLUZIONE:
$f(z) = sin(\frac{1}{z})$. Infatti 0 é una singolaritá isolata, ma per $\frac{1}{sin(\frac{1}{x})}$ non lo é perché 0 é un punto di accumulazione per le singolaritá (é sempre una singolaritá ma non é isolata in quanto qualsiasi intorno io consideri dell'origine posso trovare almeno un'altra singolaritá oltre quella in 0).

2. Calcolare il numero di radici del polinomio $g(z) = z^4 - 5z + 1$ contenute nella corona circolare $1 < |z| < 2$.
SOLUZIONE:
$g(z)$ ha 3 radici nella corona. Ció si ottiene applicando il teorema di Rouché rispettivamente prendendo $f(z) = -5z$ e utilizzando la circonferenza unitaria, e $f(z) = z^4$ e utilizzando la circonferenza $|z| = 2$.

3. Utilizzando il teorema di Rouché dare informazioni sulla posizione delle radici del polinomio $f(z) = z^4 - z^2 - 7z - 1$.
SOLUZIONE:
Si trovano tutte nel disco $|z| < 3$ ed una di esse nel disco $|z| < 1$.

4. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)^2(x^2+2x+2)}dx$
SOLUZIONE:
I$=\dfrac{7\pi}{50}$

5. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{cos(x)}{1+x^4}dx$
SOLUZIONE:Poiché $cosx = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$, abbiamo che:
$\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{cos(x)}{1+x^4}dx = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{1+x^4}dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{ix}}{1+x^4}dx.$
Sia γ_R la semi-circonferenza di raggio R e centro l'origine nel semi-piano superiore.Dal Teorema dei residui si ottiene che:
$\displaystyle\int_{-R}^{R} \frac{e^{ix}}{1+x^4}dx - \int_{\gamma_R} \frac{e^{iz}}{1+z^4}dz = 2i\pi[Res(\frac{e^{iz}}{1+z^4}, e^{i\frac{\pi}{4}}) + Res(\frac{e^{iz}}{1+z^4}, e^{i\frac{3\pi}{4}})],$
Siccome:
$Res(\frac{e^{iz}}{1+z^4}, e^{i\frac{i\pi}{4}}) = \frac{1}{4}e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}}e^{i(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{3\pi}{4})}$,$Res(\frac{e^{iz}}{1+z^4}, e^{i\frac{i3\pi}{4}}) = -\frac{1}{4}e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}}e^{-i(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{3\pi}{4})}$,
si ottiene che:

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{cos(x)}{1+x^4} dx = -\pi e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}} sin(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{3\pi}{4}).$$

6. $\displaystyle\int_{|z-1|=2} \frac{dz}{(z^4-3z^2-4)^2}$
SOLUZIONE:
Prima di tutto osserviamo che $(z^4 - 3z^2 - 4)^2 = (z^2+1)^2(z^2-4)^2$ si annulla in $\pm i$ e ± 2 con molteplicitá 2. Notiamo che solo $\pm i$ sono interni a $|z-1| = 2$.Quindi, dal Teorema dei Residui, abbiamo che:
$$\int_{|z-1|=2} \frac{dz}{(z^4-3z^2-4)^2} = 2\pi i \left((\frac{1}{(z^2+1)^2(z+2)^2})'(-i) + (\frac{1}{(z^2+1)^2(z+2)^2})'(i) \right) =$$
$$2\pi i[-2\frac{21}{(20)^3} + 2\frac{9}{(10i)^3} + 2\frac{9}{(-10i)^3}] = -\frac{21}{2000} i\pi.$$

7. $\displaystyle\int_{C_1} \frac{z^3}{11z^4+2z^3+5z^2+1} dz$
SOLUZIONE:
Utilizzando il teorema di Rouché si verifica che tutte le radici del denominatore sono interne a C_1. Quindi l'integrale si puó calcolare attraverso il residuo all'infinito. Si ottiene $I = \frac{2}{11}\pi i$.

8. $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{100z+2}{1+z^{1224}} dz$
SOLUZIONE:
La funzione ha un numero finito di singolaritá, tutte sul disco di raggio 1,in quanto se z risolve $z^{1224} = -1 \Rightarrow |z| = 1$.
Uso il metodo del residuo all'infinito:
$Res_\infty(f) = -\sum Res(f)$
$Res_\infty(f) = Res_0(g)$ dove $g = -\frac{1}{u^2} f(\frac{1}{u})$; quindi nel nostro caso:
$g(u) = -\frac{1}{u^2} \frac{\frac{100}{u}+2}{1+\frac{1}{u^{1224}}} = \frac{-1000u^{1224}+2u^{1222}}{u^{1224}+1}$.
In 0, g non ha singolaritá $\Rightarrow Res_0(g) = 0 = -\sum Res(f)$.
Quindi l'integrale é nullo.