Universitá degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di AC310

A.A. 2012-2013 - Docente: Prof. Pierpaolo Esposito
Tutori: Dario Giannini e Giulia Salustri

TUTORATO 5
19 NOVEMBRE 2012

1. $\displaystyle\int_C \frac{log^3(z)}{z}dz$, dove $C = \{|z| = 1 \;\; t.c. \;\; arg(z) \in [0; \frac{\pi}{2}]\}$.
Si consideri solo la determinazione principale del logaritmo.

SOLUZIONE:
Ricordiamo che $Log(z) = log|z| + i(argz + 2k\pi)$, dove la determinazione principale é individuata da $k = 0$.
Parametrizziamo $C = e^{it}$, con $t \in [0; \frac{\pi}{2}]$ e $\dot{C} = ie^{it} \Rightarrow$
$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(log|e^{it}| + iarg(e^{it}))^3}{e^{it}} ie^{it}dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^3 dt = \frac{\pi^4}{64}$

2. Dimostrare che $\displaystyle\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1} \frac{e^z}{z-2}dz = 0$
senza utilizzare né il metodo di Cauchy né il metodo dei residui.

SOLUZIONE:
$f(z) = \dfrac{e^z}{z-2}$ é olomorfa in $\mathbb{C} - \{2\}$, ossia in tutti i punti tranne quello in cui si annulla il denominatore.
Tuttavia in $\overline{D_1(0)}$ f é olomorfa, quindi ammette primitiva. L'integrale é perció nullo in quanto sto integrando lungo una linea chiusa.

3. Calcolare i seguenti integrali:
(a) $\displaystyle\int_{|z-2|+|z+2|=6} \frac{e^{3z}}{z - \pi i}dz$;
(b) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{cos(3\theta)}{5 + 4cos(\theta)}d\theta$;
(c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)^2}$;
(d) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dt}{1 - 2acost + a^2}$, dove $|a| < 1$;
(e) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{cos(mx)}{5 + 3cos(x)}dx$, per $m \in \mathbb{N}$;
(f) $\displaystyle\int_0^{2\pi} sin^2(x)dx$;
(g) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{sin(x)}{x(1+x^2)}dx$.

SOLUZIONI:

(a) $|z+2|+|z-2|=6$ é l'ellisse nel piano di Gauss con fuochi $(2;0)$ e $(0;2)$ e semiasse reale 3.
La funzione ha un polo semplice in πi, ma questo punto non é dentro l'ellisse. Infatti $|\pi i-2|+|\pi i+2| \approx 2\sqrt{13} > 6$.
L'integrale é quindi nullo.

(b) Per risolvere questo integrale trigonometrico sostituisco $z = e^{i\theta} \Rightarrow$
$cosz = \dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} = \dfrac{z+z^{-1}}{2}$, quindi $cos(3z) = \dfrac{z^3+z^{-3}}{2}$.
Si ottiene cosí l'integrale $\displaystyle\int_{C_1} \frac{z^6+1}{2z^3(2z^2+7)} = -\frac{\pi}{12}$

(c) La funzione ha poli di ordine 1 in $\pm i$ e di ordine 2 in $\pm 2i$. Ai fini del caloclo dell'integrale mi interessa solo calcolare i residui delle singolaritá che hanno parte immaginaria strettamente positiva. In questo caso:
$Res_i(f) = \frac{1}{18i}$ e $Res_{2i}(f) = -\frac{1}{288i} \Rightarrow$
Il valore dell'integrale sará $2\pi i\left(\dfrac{1}{18i} - \dfrac{1}{288i}\right) = \dfrac{5}{144}\pi$.

(d) Applico la sostituzione $z = e^{it}$ ottenendo:

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{1-2acost+a^2} = \int_{C_1} \frac{1}{iz}\frac{dz}{1-a(z+z^{-1})+a^2} = -i\int_{C_1} \frac{dz}{-az^2+(a^2+1)a-a}$$

Per svolgere questo integrale basta applicare il teroema dei residui:
La funzione é olomorfa in tutti i punti tranne a e $\frac{1}{a}$, tuttavia quest'ultimo non é da tenere in considerazione poiche non appartiene a C_1 in quanto $|a| < 1$ per ipotesi.
$Res_a(f) = \frac{1}{1-a^2}$, quindi la soluzione dell'integrale sará $\dfrac{1}{i}2\pi i\dfrac{1}{1-a^2} = \dfrac{2\pi}{1-a^2}$

(e) Analogo al caso **(b)**.

(f) Riporto quest'integrale reale nel campo complesso utilizzando la sostituzione parametrica $z = e^{it}$. l'integrale diventa:

$$\int_0^{2\pi} sin^2(x)dx = \int_{C_1} \frac{1}{iz}\left(-\frac{1}{4}\right)\left(z+\frac{1}{z}\right)^2 dz =$$

$$-\frac{1}{4i}\int_{C_1} \frac{z^4-2z^2+1}{z^3}dz = -\frac{1}{4i}2\pi i Res_0(f) = \pi$$

La funzione presenta infatti solamente un polo di ordine 3 nell'origine il cui residuo vale -2.

(g) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{sin(x)}{x(1+x^2)}dx = 2\pi i \sum_{z:Im(z)>0} Res_z(f)$.

In questo caso la funzione (portata in campo complesso), presenta una singolaritá eliminabile in $z=0$ e due singolaritá polari semplici in $z=\pm i$.
A me serve calcolare solo il residuo in $z=i$ in quanto é l'unica singolaritá ad avere parte immaginaria strettamente positiva.
$Res_i(f) = -\frac{1}{2}sin(i)$, quindi l'integrale varrá $-\pi i sin(i) = \pi sinh(1)$.
N.B. Controllare sempre che il risultato di un integrale reale sia un valore

reale!

4. Determinare il numero di zeri delle seguenti funzioni negli nsiemi indicati:
(a)$z^4 - 3z^3 - 1$ in $B_2(0)$ e in $B_2(0) - B_1(0)$;
(b) $z^4 - 6z + 4$ in $B_2(0) - B_1(0)$;
(c) $4z^4 - 29z^2 + 25$ in $B_3(0) - B_2(0)$ e in $B_1(0)$;
(d) $z^6 - 6z^3 + z^2 - 1$ in $B_2(0) - B_1(0)$.

SOLUZIONE:
Innanzitutto ricordiamo l'enunciato del teorema di Rouché:
Sia U in $\mathbb{C}$ un aperto semplicemente connesso e sia $\gamma : [a,b] \to U$ un arco chiuso. Siano $f, g \in \mathbb{H}(U) \Rightarrow$
Se $|f(z) - g(z)| \leq |f(z)| \quad \forall z \in Im(\gamma)$ si ha che:

$$\sum_{z \in U - Im(\gamma)} I(\gamma, z) o_z(f) = \sum_{z \in U - Im(\gamma)} I(\gamma, z) o_z(g)$$

Se come γ scelgo una circonferenza di un disco aperto D contenuto in U si ha che f e g hanno lo stesso numero di zeri contati con molteplicitá in quanto l'indice di avvitamento é 1.
(a) Per trovare gli zeri nella corona basta trovare gli zeri in $B_2(0)$ e poi sottrarvi quelli in $B_1(0)$.
$f(z) = 3z^3$, $g(z) = z^4 - 3z^3 - 1$ e $\gamma = B_2(0)$, allora si ha che:
$|f(z) - g(z)| = |z^4 + 1| \leq 17 < 24 = |3z^3| = |f(z)|$, quindi g possiede 3 zeri nel disco di raggio 2.
Siano f e g definite come prima e $\gamma = B_1(0)$.
$|f(z) - g(z)| = |z^4 + 1| \leq 2 < 3 = |3z^3| = |f(z)|$, quindi g possiede 3 zeri nel disco di raggio 1 e 0 nella corona circolare.

(b) Siano $f(z) = z^4$ e $g(z) = z^4 - 6z + 4$ con $\gamma = B_2(0)$.
$|f(z) - g(z)| = |6z - 4| \leq 16 = |z^4| = |f(z)|$, quindi g possiede 4 zeri nel disco di raggio 2.
Siano $f(z) = -6z$ e $g(z) = z^4 - 6z + 4$ con $\gamma = B_1(0)$.
$|f(z) - g(z)| = |z^4 - 4| \leq 5 < 6 = |-6z| = |f(z)|$, quindi la funzione possiede uno zzero nel disco di raggio 1 e 3 nella corona circolare.

(c) Siano $g(z) := 4z^4 - 29z^2 + 25$, $f(z) := 4z^4$ e $\gamma = B_3(0)$ si ha che:
$|f(z) - g(z)| = |29z^2 - 25| \leq 286 < 324 = |4z^4| = |f(z)|$, quindi g ha in $B_3(0)$ quattro zeri.
Sia $g(z) := 4z^4 - 29z^2 + 25$, $f(z) := -29z^2$ e $\gamma = B_2(0)$ si ha che:
$|f(z) - g(z)| = |-4z^4 - 25| \leq 89 < 116 = |29z^2| = |f(z)|$, quindi g ha in $B_2(0)$ due zeri e due zeri nella corona.
Si verifica facilmente che in $B_1(0)$ g ammette due zeri.

(d) $g(z) := z^6 - 6z^3 + z^2 - 1$. Su $B_2(0)$, prendiamo $f(z) := z^6$. Su

$B_1(0)$ invece prendiamo $f(z) := -6z^3$.
La conclusione é che g ha tre zeri nella corona.

5. Per quali valori di k la funzione $f(z) = z^k + sin(z)$ ammette k zeri in $B_R(0)$?
SOLUZIONE:
Una funzione che ha k zeri in $B_R(0)$ (per ogni R) é z^k.
L'obiettivo é quindi applicare il teorema di Rouché con $g(z) = z^k$ (f e g si scambiano di ruolo rispetto alla notazione del teorema), ovvero é necessario stimare $|sin(z)|$ sviluppando in serie:

$$|sin(z)| = \left| \sum_{n\geq 0} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \right| \leq \sum_{n\geq 0} \frac{|z|^{2n+1}}{(2n+1)!} \leq \sum_{n\geq 0} \frac{|z|^n}{n!} = e^{|z|}$$

Per avere $|f-g| < |g|$ su $B_R(0)$, é sufficiente quindi avere $e^R < R^k$, ovvero $e^R < e^{klog(R)}$ (dove log é il logaritmo reale) $\Rightarrow R < klog(R) \Rightarrow k > \frac{R}{log(R)}$.