Universitá degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di AC310

A.A. 2012-2013 - Docente: Prof. Pierpaolo Esposito
Tutori: Dario Giannini e Giulia Salustri

Tutorato 4
17 Novembre 2012

1. Trovare $a \in \mathbb{R}$ t.c. il seguente integrale sia nullo e spiegare teoricamente il risultato ottenuto:
$\int_{C_1} (z - a\bar{z})dz$
Soluzione:
Possiamo spezzare l'integrale in $\int_{C_1} (z)dz - a\int_{C_1} (\bar{z})dz$; z è olomorfo quindi il primo integrale si annulla,invece $\bar{z}$ non è olomorfo, quindi l' unico valore di a per cui l'integrale riuslta nullo è $a = 0$.

2. Calcolare tutti i possibile valori di:
$\int_C \frac{dz}{\sqrt{z}}$, dove $C = \{|z| = 1 \ t.c. \ arg(z) \in [0, \pi]\}$
Soluzione:
Poniamo $\gamma(t) = e^{it}$, quindi avremo $\gamma'(t) = ie^{it}$, $t \in [0, \pi]$.
$\int_C \frac{dz}{\sqrt{z}} = \int_0^\pi ie^{\frac{it}{2}}\,dt = 2\left[e^{\frac{it}{2}} - 1\right] = 2\left[cos(\frac{\pi}{2}) + isin(\frac{\pi}{2})\right] = 2i - 2$

3. Risolvere i seguenti integrali utilizzando sia il metodo di Cauchy sia il metodo dei residui:

Soluzione:
(a) $\int_\gamma \frac{cosh(z)}{(z+1)^3(z-1)}dz;$
$\gamma = \{|z| = 2\}$;Risolviamolo con Cauchy:
Abbiamo due singolarità:
in $z = 1$ abbiamo un polo di primo ordine,
in $z = -1$ abbiamo un polo di ordine tre.
Dividiamo la curva γ in quattro curve, $\gamma_1 = \{|z-1| = \frac{1}{2}\}$, $\gamma_2 = \{|z+1| = \frac{1}{2}\}$ e γ_3 e γ_4 due segmenti coincidenti che uniscono le due circonferenze
Quindi $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 - \gamma_4$.
$\int_{\gamma_1} \frac{cosh(z)}{(z+1)^3(z-1)}dz \Rightarrow$ prendiamo $f(z) = \frac{cosh(z)}{(z+1)^3} \Rightarrow f(1) = \frac{e^1+e^{-1}}{16}$
$\Rightarrow \int_{\gamma_1} \frac{cosh(z)}{(z+1)^3(z-1)}dz = \frac{\pi}{8}i(e^1 + e^{-1})$.
$\int_{\gamma_2} \frac{cosh(z)}{(z+1)^3(z-1)}dz \Rightarrow$ prendiamo $f(z) = \frac{cosh(z)}{(z-1)}$
Calcoliamo: $f'''(z) = \frac{((z-1)cosh(z))(z-1)^2-((z-1)sinh(z)-cosh(z))}{(z-1)^4}$
$\Rightarrow f'''(-1) = \frac{-7e^{-1}+e}{8}$

$$\int_{\gamma_2} \frac{cosh(z)}{(z+1)^3(z-1)}dz = \frac{\pi}{4}i(e - 7e^{-1})$$
$$\Rightarrow \int_{\gamma} \frac{cosh(z)}{(z+1)^3(z-1)}dz = \frac{\pi}{8}i(e^1 + e^{-1}) + \frac{\pi}{4}i(e - 7e^{-1} = i\frac{\pi}{8}(3e - 13e^{-1})$$

(b) $\displaystyle\int_{C_1} \frac{dz}{(2sinz - 1)^2};$

Cerchiamo le singolarità:
$(2sinz - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow 2sinz - 1 = 0 \Leftrightarrow sinz = \frac{1}{2} \Leftrightarrow z = arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$

Ho un unico polo in C_1 $z = \frac{\pi}{6}$ di ordine due.

$Res_{\frac{\pi}{6}}(f) = \lim_{z\to\frac{\pi}{6}} \frac{d}{dz}[\frac{(z-\frac{\pi}{6})^2}{(2sinz-1)^2}] = 0$

Per arrivare a questo risultato basta sostituire $t = z - \frac{\pi}{6}$ e svolgere il limite per t che tende a zero.

$$\int_{C_1} \frac{dz}{(2sinz - 1)^2} = 0.$$

(c) $\displaystyle\int_{\gamma} \frac{z}{e^z - 1}dz$, con $\gamma = C_1$ e $\gamma = C_5$;

Se $\gamma = C_1$ l'unica singolarità nell'insieme delimitato da γ è 0; infatti $e^z = 1 \Leftrightarrow z = 2ik\pi$.

$\Rightarrow Res_0(f) = 0$, quindi l'integrale è nullo.

Stessa cosa se $\gamma = C_5$.

(d) $\displaystyle\int_{C_5} \frac{e^z}{cosh(z)}dz.$

$cosh = 0 \Leftrightarrow \frac{e^z + e^{-z}}{2} = 0 \Leftrightarrow e^z + e^{-z} = 0 \Leftrightarrow e^{-z}(e^{2z} + 1) \Leftrightarrow e^{2z} = -1 \Leftrightarrow 2z = i(\pi + 2k\pi) \Leftrightarrow z = i\frac{\pi}{2} + ik\pi$ con $k \in \mathbb{R}$.

In C_5 ho quattro poli di ordine uno:
$z = i\frac{\pi}{2}$, $z = i\frac{3\pi}{2}$, $z = -i\frac{\pi}{2}$, $z = -i\frac{3\pi}{2}$

$Res_{i\frac{\pi}{2}} = 1$; $Res_{i\frac{3\pi}{2}} = 1$; $Res_{i\frac{\pi}{2}} = 1$, $Res_{-i\frac{3\pi}{2}} = 1$

$$\int_{\gamma} \frac{z}{e^z - 1}dz = 8i\pi$$

4. Dimostrare il teorema fondamentale dell'algebra sfruttando il teorema di Liouville.

   Soluzione:
   Possiamo supporre ad $a_d \neq 0, d > 0$. Se $f(z) \neq 0$ per ogni z allora la funzione $g(z) = \frac{1}{f(z)}$ è ancora una funzione intera.

   Scrivendo: $f(z) = a_d z^d = (\frac{a_d^{-1}a_0}{z^d} + \frac{a_d^{-1}a_1}{z^{d-1}} + ... + 1)$

   Vediamo che $\lim\limits_{|z|\to\infty} |f(z)| = \infty$

   e quindi $\lim\limits_{|z|\to\infty} |g(z)| = 0$

   Ne discende che, se $R \ll 0$, $|g(z)|$ è limitato dal suo massimo nel disco chiuso di raggio R, in particolare g è limitata.

   Ma allora g è costante, per il teorema di Liouville, e quindi f è costante, una contraddizione.

5. Svolgere i seguenti integrali reali:

Soluzioni:

(a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+4x+5)^2}$;

$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)dx = 2i\pi \sum_{Im(z)>0} Res_z(R(x))$

$x^2+4x+5=0 \Leftrightarrow = -2 \pm i$

Ho due poli di ordine due in $z_0 = -2+i$ e $z_1 = -2-i$; ma considero solo z_0 perchè $Im(z_0) > 0$

$Res_{-2+i}(f) = \frac{1}{4i} \Rightarrow \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+4x+5)^2} = \frac{\pi}{2}$

(b) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dt}{2+sint}$. Poniamo $z = e^{it} \Rightarrow sint = \frac{z-\frac{1}{z}}{2i} \Rightarrow \displaystyle\int_{C_1} \frac{1}{iz} \frac{dz}{2+\frac{z-\frac{1}{z}}{2i}dz} =$ $\displaystyle\int_{C-1} \frac{2iz}{iz(4iz+z^2-1)}dz$

Abbiamo che i poli sono $z = \frac{-4i\pm\sqrt{-12}}{2} = \frac{-4i\pm 2i\sqrt{3}}{2} = -2i \pm i\sqrt{3}$

Soltanto il polo semplice $z = -2i + \sqrt{3} \in C_1$, quindi $Res_{-2i\pm i\sqrt{3}} = \frac{2i}{2z+4i}|_{-2i\pm i\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

$\Rightarrow \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dt}{2+sint} = -\sqrt{3}\frac{2i\pi}{3}$.