I Esonero di AC310 - 31/10/2012 Soluzioni

Docente: Prof. Pierpaolo Esposito

Esercizio 1

Il denominatore $g(z) = 1 - \cos(iz)$ della frazione $f(z) = \frac{z(z^2+4\pi^2)}{1-\cos(iz)}$ si annulla per $z = 2\pi i m$, $m \in \mathbb{Z}$, con $g'(2\pi i m) = 0$, $g''(2\pi i m) = -1$. Siccome $z^2 + 4\pi^2 = (z - 2\pi i)(z + 2\pi i)$, abbiamo che $z = 0, 2\pi i, -2\pi i$ sono poli semplici di f mentre $z = 2\pi i m$, $m \in \mathbb{Z}$ con $|m| \geq 2$, sono poli d'ordine due di f. Inoltre si ha che

$$\text{Res }(f;0) = 4\pi^2 \frac{2}{g''(0)} = -8\pi^2, \quad \text{Res }(f;2\pi i) = -8\pi^2 \frac{2}{g''(2\pi i)} = 16\pi^2.$$

Siccome $\{2\pi i m : m \in \mathbb{Z}\} \cap D(2i, 8) = \{0, 2\pi i\}$, dal Teorema dei Residui abbiamo che

$$\int_\gamma f(z)dz = 16\pi^3 i.$$

Esercizio 2

Poiché $\cos t = \frac{z^2+1}{2z}$ per $z = e^{it} \in \gamma := (\partial B(0,1))^+$, abbiamo che

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{(2+\cos t)^2} = -4i \int_\gamma \frac{z}{(z^2+4z+1)^2} dz$$

in vista di $\gamma'(t) = i\gamma(t)$. Fattorizziamo $z^2 + 4z + 1$ come $(z + 2 + \sqrt{3})(z + 2 - \sqrt{3})$, ed osserviamo che $-2 - \sqrt{3} \notin D(0,1)$, $-2 + \sqrt{3} \in D(0,1)$. Data la funzione $h(z) = \frac{z}{(z+2+\sqrt{3})^2}$, abbiamo che

$$\text{Res }(\frac{z}{(z^2+4z+1)^2}; -2+\sqrt{3}) = h'(-2+\sqrt{3}) = \frac{1}{6\sqrt{3}},$$

e quindi dal Teorema dei Residui si ottiene che

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{(2+\cos t)^2} = 8\pi \text{Res }(\frac{z}{(z^2+4z+1)^2}; -2+\sqrt{3}) = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}.$$

Esercizio 3

Se $g(z)$ è costante, dal Teorema di Liouville la stessa proprietá vale per f, e quindi $f = \lambda g$ per un opportuno $\lambda \in \mathbb{C}$. Altrimenti, l'insieme Z_g degli zeri di g è un insieme discreto, e la funzione $h(z) = \frac{f(z)}{g(z)}$ risulta essere ben definita ed olomorfa in $\mathbb{C} \setminus Z_g$. Poiché la funzione h risulta essere limitata in $\mathbb{C} \setminus Z_g$, i punti di Z_g rappresentano singolaritá rimovibili di h, che puó quindi essere pensata come $h \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$. Dal Teorema di Liouville segue che $h(z) = \lambda$, e quindi $f = \lambda g$ per un opportuno $\lambda \in \mathbb{C}$.