Appello C di AC310 - 4/6/2013 Soluzioni

Docente: Prof. Pierpaolo Esposito

1) Dato $0 < \epsilon < R$, sia $\Gamma_{\epsilon,R}$ la curva ottenuta unendo il segmento $[\epsilon i, \epsilon i + \sqrt{R^2 - \epsilon^2}]$, l'arco di circonferenza orientata positivamente di raggio R da $\epsilon i + \sqrt{R^2 - \epsilon^2}$ a $-\epsilon i + \sqrt{R^2 - \epsilon^2}$, il segmento $[-\epsilon i + \sqrt{R^2 - \epsilon^2}, -\epsilon i]$ e l'arco di circonferenza orientata negativamente di raggio ϵ da $-\epsilon i$ a ϵi. Nella regione interna a $\Gamma_{\epsilon,R}$ definiamo $\sqrt{z} = |z|^{\frac{1}{2}} e^{i\frac{\theta}{2}}$ e $\log z = \log |z| + i\theta$ per $z = |z|e^{i\theta}$, $\theta \in [0, 2\pi]$. Abbiamo che

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma_{\epsilon,R}} \frac{z^{-\frac{1}{2}} \log z}{1+z^2} dz &= \int_0^{\sqrt{R^2-\epsilon^2}} \frac{(i\epsilon + x)^{-\frac{1}{2}} \log(i\epsilon + x)}{1 + (i\epsilon + x)^2} dx - \int_0^{\sqrt{R^2-\epsilon^2}} \frac{(-i\epsilon + x)^{-\frac{1}{2}} \log(-i\epsilon + x)}{1 + (-i\epsilon + x)^2} dx \\
&+ O\left(\frac{\log R}{R^{\frac{3}{2}}}\right) + O(\sqrt{\epsilon} \log \epsilon) \to 2 \int_0^{+\infty} \frac{x^{-\frac{1}{2}} \log x}{1+x^2} dx + 2\pi i \int_0^{+\infty} \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{1+x^2} dx
\end{aligned}$$

per $\epsilon \to 0$ e $R \to +\infty$. Poiché la funzione $f(z) := \frac{z^{-\frac{1}{2}} \log z}{1+z^2}$ ha poli in $\pm i$ con

$$\text{Res}\,(f; i) = \frac{\pi}{4} e^{-\frac{\pi i}{4}}, \qquad \text{Res}\,(f; -i) = -\frac{3\pi}{4} e^{-\frac{3\pi i}{4}},$$

dal Teorema dei residui otteniamo che

$$2 \int_0^{+\infty} \frac{x^{-\frac{1}{2}} \log x}{1+x^2} dx + 2\pi i \int_0^{+\infty} \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{1+x^2} dx = \frac{\pi^2}{2} i (e^{-\frac{\pi i}{4}} - 3e^{-\frac{3\pi i}{4}}).$$

Quindi abbiamo che

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{-\frac{1}{2}} \log x}{1+x^2} dx = -\frac{\sqrt{2}}{4} \pi^2.$$

2) Scegliamo la funzione $g(z) = 3z^n$ come confronto per la $f(z)$. Poiché

$$|f(z) - g(z)| = |e^z| \le e < 3 = |g(z)| \qquad \forall\, z \in \partial D(0,1),$$

dal Teorema di Rouché otteniamo che $f(z)$ ha n zeri (contati con molteplicitá) in $D(0,1)$. Poiché $f'(z) = e^z + 3nz^{n-1}$, abbiamo che $f(z) = f'(z) = 0$ implica $z = 0, n$. Da $f(0) = 1 > 0$, otteniamo che gli zeri di f in $D(0,1)$ sono semplici, e sono quindi esattamente n.

3) Nel caso f olomorfa, l'esistenza di una primitiva olomorfa segue dalla caratterizzazione dei domini semplicemente connessi. Nel caso f meromorfa, possiamo definire una primitiva meromorfa $F(z)$ come

$$F(z) = \int_\gamma f(w) dw,$$

con γ curva in $\Omega \setminus \{\text{poli di } f\}$ che connette un punto fissato $z_0 \in \Omega$ e z. L'esistenza di una curva siffatta discende dalla connessione di Ω, e, se γ_1 e γ_2 sono due curve siffatte, abbiamo che

$$\int_{\gamma_1} f(w)dw - \int_{\gamma_2} f(w)dw = 2\pi i \sum_{P \in \{\text{poli di } f\}} \text{Res }(f; P)$$

dal Teorema di Cauchy su domini semplicemente connessi. Affinché la definizione di $F(z)$ non dipenda dalla scelta di γ, risulta sufficiente chiedere che f abbia residuo nullo in ognuno dei suoi poli. Viceversa, se $F(z)$ esiste, abbimo che $\int_\gamma f(w)dw = F(z) - F(z_0)$ non dipende da γ, e quindi necessariamente f ha residuo nullo in ognuno dei suoi poli.