AC310 - ESERCITAZIONE VI

13 DICEMBRE 2012

Esercizio svolto 1. Calcolare il seguente integrale:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\log(1+x^2)}{1+x^2}\, dx.$$

Soluzione. Si verifica facilmente che l'integrale è convergente (infatti per x grandi la funzione integranda si comporta come $\frac{1}{x^{2-\varepsilon}}$, per ogni $\varepsilon > 0$).

Integriamo la funzione $f(z) = \frac{\log(i+z)}{1+z^2}$ lungo il cammino $\Gamma_R = C_R + \sigma_- + \sigma_+$, dove

- C_R è la semicirconferenza (orientata positivamente) di raggio R e centro nell'origine, contenuta nel semipiano superiore;
- σ_- è il segmento orientato che unisce il punto $-R$ con l'origine;
- σ_+ è il segmento orientato che unisce l'origine con il punto R.

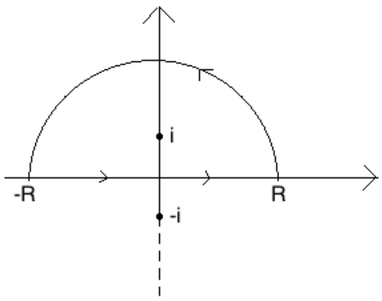

FIGURE 1

Osserviamo che f è una funzione meromorfa in $\Omega := \mathbb{C} \setminus \{z = x + iy : \ y < -1\}$ (si consideri la determinazione analitica di $\log(i+z)$ tale che $\log i = \frac{\pi}{2} i$).

La funzione f ha un polo semplice in $z = i$, che è contenuto all'interno della regione delimitata da Γ_R (se $R > 1$). Calcoliamone il residuo:

$$\mathrm{Res_f(i)} = \frac{\log 2\mathrm{i}}{2\mathrm{i}} = \frac{\log 2 + \mathrm{i}\frac{\pi}{2}}{2\mathrm{i}}.$$

Applicando il teorema dei residui:

$$\int_{\Gamma_R} \frac{\log(i+z)}{1+z^2}\, dz = 2\pi i \,\mathrm{Res_f(i)} = \pi \log 2 + \mathrm{i}\frac{\pi^2}{2}.$$

Studiamo gli integrali di f calcolati lungo i pezzi di curva che compongono Γ_R.

- Cominciamo con l'integrale lungo C_R:

$$\begin{aligned}
\left|\int_{C_R} \frac{\log(i+z)}{1+z^2}\,dz\right| &\leq \int_{C_R} \frac{|\log(i+z)|}{|1+z^2|}\,|dz| \leq \\
&\leq \int_{C_R} \frac{\sqrt{\log^2|i+z^2|+\pi^2}}{|z|^2-1}\,|dz| \leq \\
&\leq \int_{C_R} \frac{\sqrt{\log^2(R^2+1)+\pi^2}}{R^2-1}\,|dz| \leq \\
&\leq \pi R\cdot \frac{\sqrt{\log^2(R^2+1)+\pi^2}}{R^2-1} \stackrel{R\to+\infty}{\longrightarrow} 0.
\end{aligned}$$

- Calcoliamo ora l'integrale lungo σ_-. Osserviamo innanzitutto che $z\in\sigma_-$ è della forma $z=x$, dove $x\in[-R,0]$. Quindi:

$$\begin{aligned}
\int_{\sigma_-} \frac{\log(i+z)}{1+z^2}\,dz &= \int_{-R}^{0} \frac{\log(i+x)}{1+x^2}\,dx = \\
&= \int_0^R \frac{\log(i-x)}{1+x^2}\,dx = \\
&= \int_0^R \frac{\log|i-x|+i\pi}{1+x^2}\,dx = \\
&= \int_0^R \frac{\log|i-x|}{1+x^2}\,dx + i\pi\cdot\int_0^R \frac{1}{1+x^2}\,dx = \\
&= \int_0^R \frac{\log|i-x|}{1+x^2}\,dx + i\pi \arctan x\Big]_0^R = \\
&= \int_0^R \frac{\log|i-x|}{1+x^2}\,dx + i\pi\arctan R.
\end{aligned}$$

In particolare, passando al limite per $R\to+\infty$ si ottiene:

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{\sigma_-} \frac{\log(i+z)}{1+z^2}\,dz = \int_0^{+\infty} \frac{\log|i-x|}{1+x^2}\,dx + i\frac{\pi^2}{2}.$$

- In maniera analoga si calcola l'integrale lungo σ_+. Osserviamo innanzitutto che $z\in\sigma_+$ è della forma $z=x$, dove $x\in[0,R]$. Quindi:

$$\begin{aligned}
\int_{\sigma_+} \frac{\log(i+z)}{1+z^2}\,dz &= \int_0^R \frac{\log(i+x)}{1+x^2}\,dx = \\
&= \int_0^R \frac{\log|i+x|}{1+x^2}\,dx.
\end{aligned}$$

In particolare, passando al limite per $R\to+\infty$ si ottiene:

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{\sigma_+} \frac{\log(i+z)}{1+z^2}\,dz = \int_0^{+\infty} \frac{\log|i+x|}{1+x^2}\,dx.$$

In conclusione:

$$\begin{aligned}
\pi \log 2 + i\frac{\pi^2}{2} &= \lim_{R\to+\infty}\int_{\Gamma_R}\frac{\log(i+z)}{1+z^2}\,dz = \\
&= \int_0^{+\infty}\frac{\log|i-x|}{1+x^2}\,dx + \int_0^{+\infty}\frac{\log|i+x|}{1+x^2}\,dx + i\frac{\pi^2}{2} = \\
&= \int_0^{+\infty}\frac{\log|i-x| + \log|i+x|}{1+x^2}\,dx + i\frac{\pi^2}{2} = \\
&= \int_0^{+\infty}\frac{\log\left(|i-x|\cdot|i+x|\right)}{1+x^2}\,dx + i\frac{\pi^2}{2} = \\
&= \int_0^{+\infty}\frac{\log\left(1+x^2\right)}{1+x^2}\,dx + i\frac{\pi^2}{2},
\end{aligned}$$

da cui segue:

$$\int_0^{+\infty}\frac{\log\left(1+x^2\right)}{1+x^2}\,dx = \pi\log 2.$$

Esercizio svolto 2. Calcolare gli sviluppi in serie di Laurent, con centro in $z = 0$, della funzione $f(z) = \frac{z+1}{(z+2)(z-1)}$.

Soluzione. Osserviamo innanzitutto che la funzione f ha due poli semplici in $z = -2$ e $z = 1$. In particolare:

$$f(z) = \frac{z+1}{(z+2)(z-1)} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{z+2} + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{z-1}.$$

Distinguiamo tre casi:

I. $|z| < 1$. Utilizzando gli sviluppi noti:

$$\frac{1}{z-1} = -\frac{1}{1-z} = -\sum_{n=0}^{+\infty} z^n$$

e

$$\frac{1}{z+2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\frac{z}{2}} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{z^n}{2^n}.$$

Quindi in $|z| < 1$ si ha:

$$f(z) = \frac{1}{6}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{z^n}{2^n} - \frac{2}{3}\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{3}\left(\frac{(-1)^n}{2^{n+1}} - 2\right)z^n.$$

II. $1 < |z| < 2$. Utilizzando gli sviluppi noti (osserviamo che in questa regione $|z| > 1$):

$$\begin{aligned}
\frac{1}{z-1} &= \frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z}} = \frac{1}{z}\cdot\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{z^n} = \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{z^{n+1}} = \sum_{n=-\infty}^{-1} z^n
\end{aligned}$$

e (analogamente al punto I)

$$\frac{1}{z+2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\frac{z}{2}} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{z^n}{2^n}.$$

Quindi in $1<|z|<2$ si ha:

$$f(z) = \frac{2}{3}\sum_{n=-\infty}^{-1} z^n + \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{z^n}{2^{n+1}}.$$

III. $|z|>2$. Utilizzando gli sviluppi noti (osserviamo che in questa regione $|z|>2$):

$$\begin{aligned}\frac{1}{z+2} &= \frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1+\frac{2}{z}} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{2^n}{z^n} = \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{2^n}{z^{n+1}} = \sum_{n=-\infty}^{0}(-1)^n\frac{2^{-n}}{z^{-n+1}} = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{0}(-1)^n\frac{z^{n-1}}{2^n} = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{-1}(-1)^{n-1}\frac{z^n}{2^{n-1}}\end{aligned}$$

e (analogamente al punto II)

$$\begin{aligned}\frac{1}{z-1} &= \frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z}} = \frac{1}{z}\cdot\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{z^n} = \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{z^{n+1}} = \sum_{n=-\infty}^{-1} z^n.\end{aligned}$$

Quindi in $|z|>2$ si ha:

$$\begin{aligned}f(z) &= \frac{2}{3}\sum_{n=-\infty}^{-1} z^n + \frac{1}{3}\sum_{n=-\infty}^{-1}(-1)^{n-1}\frac{z^n}{2^{n-1}} = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{-1}\frac{1}{3}\left(\frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}+2\right)z^n.\end{aligned}$$

Esercizio svolto 3. Siano (z_1, z_2, z_3) e (w_1, w_2, w_3) due terne di numeri complessi distinti. Dimostrare che esiste un'unica trasformazione lineare fratta F tale che $F(z_j) = w_j$ per ogni $j = 1, 2, 3$.

Soluzione. Scomponiamo il problema in problemi più semplici:

I. Dimostriamo innanzitutto che l'identità è l'unica trasformazione lineare fratta che mappa

$$\begin{aligned}0 &\longmapsto 0\\ 1 &\longmapsto 1\\ \infty &\longmapsto \infty.\end{aligned}$$

Supponiamo infatti che esista una trasformazione $F(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ come sopra. Poiché $F(0) = 0$, si deve avere $b = 0$ e dal momento che $F(\infty) = \infty$, si deve anche avere $c = 0$. Quindi $F(z) = \frac{a}{d}z$. Poiché $F(1) = 1$, allora $a = d$ e quindi $F(z) = z$, cioè l'identità.

II. Dimostriamo ora che data una terna (z_1, z_2, z_3) di numeri complessi distinti, esiste un'unica trasformazione lineare fratta G tale che:

$$\begin{array}{ccc} z_1 & \longmapsto & 0 \\ z_2 & \longmapsto & 1 \\ z_3 & \longmapsto & \infty. \end{array}$$

Basta scegliere:

$$G(z) = \frac{z - z_1}{z - z_3} \cdot \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_1}.$$

Ovviamente questa trasformazione è unica. Se infatti esistessero G_1 e G_2 come sopra, allora la trasformazione lineare fratta $H = G_2^{-1} \circ G_1$ mapperebbe

$$\begin{array}{ccc} 0 & \longmapsto & 0 \\ 1 & \longmapsto & 1 \\ \infty & \longmapsto & \infty \end{array}$$

e, per quanto dimostrato al punto I, si avrebbe $H(z) = z$ e quindi $G_2(z) = G_1(z)$.

III. Dimostriamo ora il problema iniziale. Siano (z_1, z_2, z_3) e (w_1, w_2, w_3) due terne di numeri complessi distinti. Dimostriamo che esiste un'unica trasformazione lineare fratta F tale che $F(z_j) = w_j$ per ogni $j = 1, 2, 3$. Dal punto II segue che esistono F_1 e F_2 tali che:

$$\begin{array}{ccccc} & F_1 & & F_2 & \\ z_1 & \longrightarrow & 0 & \longleftarrow & w_1 \\ z_2 & \longrightarrow & 1 & \longleftarrow & w_2 \\ z_3 & \longrightarrow & \infty & \longleftarrow & w_3 \end{array}$$

La trasformazione richiesta è data da $F = F_2^{-1} \circ F_1$.

Per dimostrare l'unicità si procede in maniera simile a quanto fatto in II. Supponiamo che esistano due trasformazioni F e $\tilde{F}$ tali che

$$\begin{array}{ccc} z_1 & \longmapsto & w_1 \\ z_2 & \longmapsto & w_2 \\ z_3 & \longmapsto & w_3 \end{array}$$

e sia G la trasformazione lineare fratta tale che

$$\begin{array}{ccc} z_1 & \longmapsto & 0 \\ z_2 & \longmapsto & 1 \\ z_3 & \longmapsto & \infty. \end{array}$$

Osserviamo ora che la trasformazione lineare fratta $H = G \circ \tilde{F}^{-1} \circ F \circ G^{-1}$ mappa

$$\begin{array}{ccc} 0 & \longmapsto & 0 \\ 1 & \longmapsto & 1 \\ \infty & \longmapsto & \infty. \end{array}$$

Per quanto dimostrato nel punto I, H deve essere l'identità:

$$\begin{aligned} H(z) = z \quad & \Longleftrightarrow \quad G \circ \tilde{F}^{-1} \circ F \circ G^{-1}(z) = z \\ & \Longleftrightarrow \quad \tilde{F}^{-1} \circ F(z) = z \\ & \Longleftrightarrow \quad F(z) = \tilde{F}(z). \end{aligned}$$

Esercizio svolto 4. Trovare una trasformazione lineare fratta che mappi conformemente il semipiano $\mathbb{I} = \{z \in \mathbb{C} : \ \mathbb{I}\mathrm{m} z > 0\}$ nel disco unitario $\mathcal{D}_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.

Soluzione. Vogliamo trovare una trasformazione lineare fratta che mappi l'asse reale nel cerchio unitario $\{|z| = 1\}$. Poiché le trasformazioni lineari fratte preservano l'insieme delle rette e dei cerchi, basterà richiedere che tre punti sull'asse reale vengano mandati in tre punti sul cerchio unitario. Per assicurarsi che le rispettive regioni vengano mappate l'una nell'altra, basterà scegliere questi tre punti in modo che l'orientamento indotto sul cerchio unitario sia quello positivo (verso anti-orario). Ad esempio (osserviamo che questa scelta non è unica!):

$$\begin{array}{ccc} 0 & \longmapsto & -1 \\ 1 & \longmapsto & -i \\ \infty & \longmapsto & 1. \end{array}$$

La trasformazione corrispondente è data da $F(z) = \frac{z-i}{z+i}$.

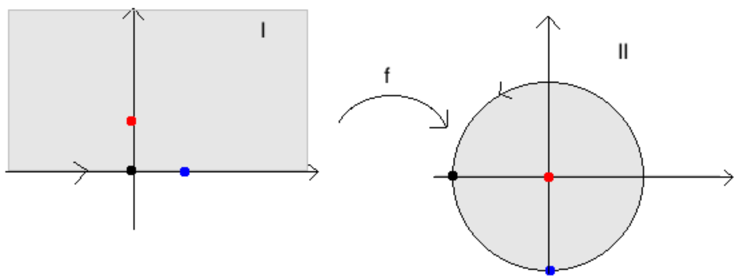

FIGURE 2

Esercizio svolto 5. Mappare conformemente la regione $\mathcal{A} = \{z \in \mathbb{C} : z \notin [-1, 1]\}$ nel disco unitario bucato $\mathcal{D}_1^0 = \{z \in \mathbb{C} : \ 0 < |z| < 1\}$.

Soluzione. Consideriamo una serie di trasformazioni successive (si faccia riferimento alla figura 3).

1. Trasformiamo il segmento $[-1, 1]$ nel semi-asse reale negativo. Ad esempio, troviamo una trasformazione lineare fratta che mappi:

$$\begin{array}{ccc} -1 & \longmapsto & \infty \\ 1 & \longmapsto & 0 \\ 0 & \longmapsto & -1. \end{array}$$

   La corrispondente trasformazione è data da $f(z) = \frac{z-1}{z+1}$. Osserviamo inoltre che $f(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \setminus \{1\}$, in quanto $f^{-1}(1) = \{\infty\}$.

2. Vogliamo mappare ora la regione $\mathbb{C}\setminus(-\infty, 0]$ nel semipiano "bucato" $\{\mathbb{I}\text{m}z > 0\} \setminus \{1\}$. Si scelga $g(z) = \sqrt{z}$. Questa è una funzione analitica, in quanto $\log z$ possiede una determinazione analitica in $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$. È facile verificare che g mappa la regione II nella regione III (si faccia riferimento alla figura 3); infatti, $g(Re^{i\vartheta}) = \sqrt{R}e^{i\frac{\theta}{2}}$.
3. Infine vogliamo mappare il semipiano "bucato" $\{z \in \mathbb{C} : \mathbb{R}\text{e}z > 0\} \setminus \{1\}$, nel disco bucato $\{0 < |z| < 1\}$. Sia h questa trasformazione. Osserviamo che vogliamo mappare l'asse immaginario nel cerchio unitario, con l'ulteriore condizione che 1 deve andare in 0 (ricordiamoci infatti che il disco è "bucato" nell'origine). Possiamo ragionare per simmetrie. Innanzitutto, mandiamo 0 in un punto sulla circonferenza unitaria, per esempio $h(0) = -1$. Ora, sappiamo che 1 deve andare in 0. Poiché le trasformazioni lineari fratte conservano le simmetrie, sarà sufficiente mappare il simmetrico di 1 rispetto all'asse immaginario (cioè -1), nel simmetrico di $h(1) = 0$ rispetto alla circonferenza unitaria (cioè ∞). In conclusione, abbiamo le seguenti condizioni:
$$\begin{array}{rcl} 0 & \longmapsto & -1 \\ 1 & \longmapsto & 0 \\ -1 & \longmapsto & \infty. \end{array}$$
La trasformazione cercata è quindi: $h(z) = \frac{z-1}{z+1}$.

In conclusione, la mappa conforme che soddisfa le condizioni richieste è:
$$\begin{aligned} F(z) &= h \circ g \circ f(z) = \frac{\sqrt{\frac{z-1}{z+1}} - 1}{\sqrt{\frac{z-1}{z+1}} + 1} = \\ &= \frac{\sqrt{z-1} - \sqrt{z+1}}{\sqrt{z-1} + \sqrt{z+1}}. \end{aligned}$$

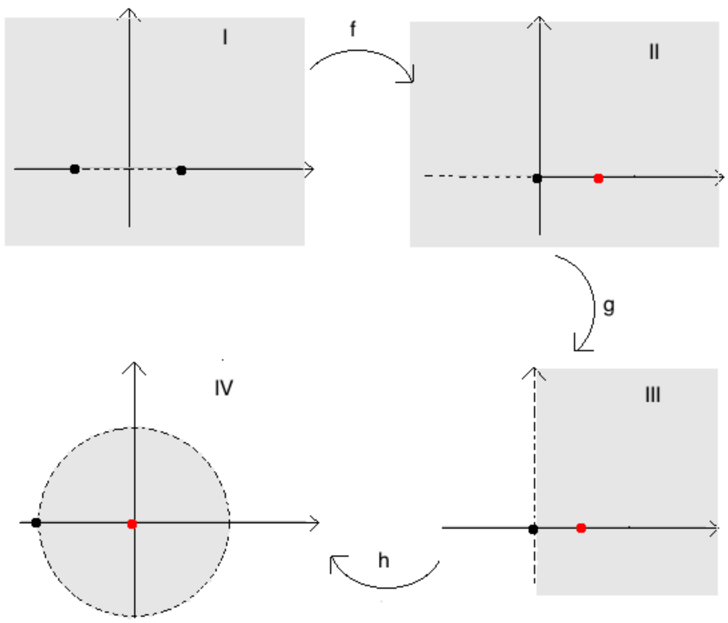

FIGURE 3

Esercizio aggiuntivo 1. Trovare tutte le trasformazioni lineari fratte che mappano il disco unitario $\{|z| < 1\}$ in se stesso.

Soluzione. Sia f una generica trasformazione di questo tipo; f mappa un punto z_0 (con $|z_0| < 1$) nel centro del disco 0.

- Se $z_0 = 0$, la mappa è solamente una rotazione: $f(z) = e^{i\theta} z$, con $\theta \in [0, 2\pi)$.

- Sia ora $z_0 \neq 0$. Per motivi di simmetria, f dovrà mappare il simmetrico di z_0 rispetto al cerchio unitario (denotiamolo con z_0^*) nel simmetrico di 0 rispetto al cerchio unitario (cioè ∞). In particolare $z_0^* = \frac{1}{\overline{z_0}}$. Quindi ($\alpha$ è un parametro necessario per normalizzare la mappa al cerchio unitario, ed eventualmente ruotare il tutto):
$$\begin{aligned} f(z) &= \alpha \cdot \frac{z - z_0}{z - z_0^*} = \alpha \cdot \frac{z - z_0}{z - \frac{1}{\overline{z_0}}} = \\ &= \alpha \overline{z_0} \cdot \frac{z - z_0}{\overline{z_0} z - 1}. \end{aligned}$$
Controlliamo ora la "normalizzazione" ($|f(1)|$ deve essere uguale a 1):
$$\begin{aligned} |f(1)| &= |\alpha| \cdot |z_0| \cdot \frac{|1 - z_0|}{|\overline{z_0} - 1|} = \\ &= |\alpha| \cdot |z_0| \cdot \frac{|1 - z_0|}{|\overline{z_0 - 1}|} = \\ &= |\alpha| \cdot |z_0|. \end{aligned}$$
Quindi $|\alpha| = \frac{1}{|z_0|}$, cioè $\alpha = \frac{e^{i\theta}}{|z_0|}$ per $\theta \in [0, 2\pi)$. In conclusione:
$$f(z) = \frac{e^{i\theta}}{|z_0|} \cdot \frac{z - z_0}{\overline{z_0} z - 1}.$$