AC310 - ESERCITAZIONE III

25 OTTOBRE 2012

Esercizio svolto 1. (Stime di Cauchy ed applicazioni)

(1) Sia f una funzione analitica su Ω, tale che $|f(z)| \leq M$ per ogni $|z| \leq R$ (con $\overline{B_R(0)} \subset \Omega$). Se $0 < \rho < R$, stimare
$$\sup_{|z|\leq\rho} |f^{(n)}(z)| \ .$$
(2) Mostrare che le derivate successive di una funzione analitica f in un punto z_0, non possono mai soddisfare la relazione $|f^{(n)}(z_0)| \geq n!n^n$ per ogni $n \geq 1$.

Soluzione.

(1) Sia z tale che $|z| \leq \rho$ e definiamo $\delta = R - \rho > 0$. Per le ipotesi fatte, sappiamo che $\overline{B_\delta(z)} \subset \overline{B_R(0)} \subset \Omega$. Usando la formula di Cauchy su dischi si ottiene la seguente rappresentazione delle derivate di f (vedi Esercitazione II):
$$f^{(n)}(\gamma) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial B_\delta(z)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-\gamma)^{n+1}}\, d\zeta$$
per ogni $|\gamma - z| < \delta$. Quindi:
$$\begin{aligned} |f^{(n)}(z)| &\leq \frac{n!M}{2\pi} \int_{\partial B_\delta(z)} \frac{1}{\delta^{n+1}} \\ &= \frac{n!M}{2\delta^{n+1}\pi} |\partial B_\delta(z)| = n!M\delta^{-n} = n!M(R-\rho)^{-n} \end{aligned}$$
e quindi
$$\sup_{B_\rho(0)} |f^{(n)}(z)| \leq n!M(R-\rho)^{-n} \ .$$
(2) Se per assurdo ciò fosse vero, allora prendendo un δ sufficientemente piccolo - in modo che $\overline{B_\delta(z_0)} \subset \Omega$, dove Ω è il dominio di analiticità di f - ed applicando le stime di Cauchy precedenti, si otterrebbe:
$$n!n^n \leq |f^{(n)}(z_0)| \leq n!\delta^{-n} \sup_{B_\delta(z_0)} |f(\zeta)| \ ,$$
da cui:
$$\sup_{B_\delta(z_0)} |f(\zeta)| \geq n^n\delta^n \stackrel{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$
che è assurdo, in quanto $|f|$ è continua su $\overline{B_\delta(z_0)}$ (che è compatto) e quindi per il teorema di Weierstrass è ivi limitata!

Esercizio svolto 2. Dimostrare che una funzione intera con parte reale positiva, è costante.

Soluzione. Supponiamo per assurdo che esista f funzione intera (non costante), tale che $\mathbb{R}\mathrm{e} z \geq 0$ per ogni $z \in \mathbb{C}$. Consideriamo la funzione:

$$g(z) := e^{-f(z)}.$$

Ovviamente g è analitica su tutto $\mathbb{C}$ (cioè è intera); inoltre, per le ipotesi fatte, $|g(z)| = e^{-\mathbb{R}\mathrm{e} f(z)} \leq 1$. Quindi g una funzione intera non costante (in quanto f non lo è ed è continua) che è limitata in modulo. Questo contraddice il teorema di Liouville.

Esercizio svolto 3. Sia f una funzione meromorfa con polo di ordine h in z_0. Dimostrare che:

$$\mathrm{Res}_{\mathrm{z}_0}\mathrm{f} = \frac{1}{(\mathrm{h}-1)!}\mathrm{D}_{\mathrm{z}}^{\mathrm{h}-1}[(\mathrm{z}-\mathrm{z}_0)^{\mathrm{h}}\mathrm{f}(\mathrm{z})]_{|\mathrm{z}=\mathrm{z}_0}\ .$$

Soluzione. Ricordiamo che per *Residuo* di una funzione f in z_0, intendiamo il coefficiente a_{-1} dello sviluppo in serie di Laurent con centro in z_0 (chiaramente se f è analitica in z_0 il suo residuo in tale punto è 0).
Sia f una funzione meromorfa con polo in z_0 di ordine $h > 0$. Vogliamo trovare il coefficiente a_{-1} del suo sviluppo in serie di Laurent in z_0. Osserviamo che per le condizioni date, si ha che la funzione $(z - z_0)^h f(z)$ è analitica in z_0 e il coefficiente b_{h-1} del suo sviluppo di Taylor in z_0 coincide proprio con l'a_{-1} che stiamo cercando. Quindi:

$$\mathrm{Res}_{\mathrm{z}_0}\mathrm{f} = \frac{1}{(\mathrm{h}-1)!}\mathrm{D}_{\mathrm{z}}^{(\mathrm{h}-1)}[(\mathrm{z}-\mathrm{z}_0)^{\mathrm{h}}\mathrm{f}(\mathrm{z})]_{|\mathrm{z}=\mathrm{z}_0}\ .$$

Esercizio svolto 4. Trovare i poli ed i relativi residui delle seguenti funzioni:

a) $\frac{1}{z^2+5z+6}$

b) $\frac{1}{(z^2-1)^2}$

c) $\frac{1}{\sin z}$

d) $\frac{\cos z}{\sin z}$

e) $\frac{1}{\sin^2 z}$.

Soluzione.

a) La funzione ha poli semplici in $z = -2, -3$. Infatti:
$$\frac{1}{z^2+5z+6} = \frac{1}{(z+2)(z+3)} = \frac{1}{z+2} - \frac{1}{z+3}\ .$$
Quindi $\mathrm{Res}_{-2} = 1$ e $\mathrm{Res}_{-3} = -1$.

b) La funzione ha due poli di ordine 2 in $z = -1, 1$. I relativi residui sono: $\mathrm{Res}_{-1} = \frac{1}{4}$ e $\mathrm{Res}_1 = -\frac{1}{4}$.

c) Questa funzione ha poli in ogni multiplo intero di π: quindi tutti e soli i poli (semplici) sono della forma $z = k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$. D'altro canto la funzione è periodica di pediodo 2π sull'asse reale, e quindi sarà sufficiente calcolare il residuo in 0 e π.

Per il residuo in 0:
$$\frac{1}{\sin z} = \frac{z}{\sin z} \cdot \frac{1}{z} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Res}_0 = 1.$$
Per il residuo in π:
$$\frac{1}{\sin z} = \frac{-1}{\sin(z-\pi)} = \frac{-(z-\pi)}{\sin(z-\pi)} \cdot \frac{1}{(z-\pi)}$$
quindi procedendo come sopra:
$$\mathrm{Res}_\pi = -1 \; .$$
Riassumendo: $\mathrm{Res}_{\mathrm{k}\pi} = (-1)^{\mathrm{k}}$.

d) Usando il punto (c), si ottene:
$$\mathrm{Res}_{\mathrm{k}\pi} = \cos(\mathrm{k}\pi) \cdot (-1)^{\mathrm{k}} = 1 \; .$$

e) Questa funzione ha poli ad ogni multiplo intero di π e tali poli sono di ordine 2. Inoltre essendo periodica di periodo π sull'asse reale, è sufficiente calcolare il residuo in $z = 0$:
$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin^2 z} &= \frac{1}{\left(z - \frac{z^3}{6} + O(z^5)\right)^2} = \\ &= \frac{1}{z^2\left(1 - \frac{z^2}{6} + O(z^4)\right)^2} = \frac{1}{z^2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z^2}{3} + O(z^4)} = \\ &= \frac{1}{z^2}\left(1 + \frac{z^2}{3} + O(z^4)\right) = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{3} + O(z^2) \; . \end{aligned}$$
Quindi $\mathrm{Res}_0 = 0$, da cui segue (per periodicità) che $\mathrm{Res}_{\mathrm{k}\pi} = 0$.

Esercizio svolto 5. Calcolare i seguenti integrali:

1) $\int_0^\pi \frac{d\vartheta}{a+\cos\vartheta}$ con $a > 1$;

2) $\int_0^\infty \frac{x^2}{x^4+5x^2+6}\, dx$;

3) $\int_0^\infty \frac{\log x}{1+x^2}\, dx$.

Soluzione.

1) Consideriamo la sostituzione (per $|z| = 1$):
$$\cos\vartheta = \frac{1}{2}(e^{i\vartheta} + e^{-i\vartheta}) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) \; .$$
In particolare, $dz = iz\, d\vartheta$. Quindi:
$$\begin{aligned} \int_0^\pi \frac{d\vartheta}{a+\cos\vartheta} &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{d\vartheta}{a+\cos\vartheta} = \\ &= \frac{1}{2}\oint_{|z|=1} \frac{dz\ (iz)^{-1}}{a + \frac{1}{2}(z+\frac{1}{z})} = \\ &= \frac{1}{i}\oint_{|z|=1} \frac{dz}{z^2+2az+1} = (*) \end{aligned}$$
La funzione integranda ha poli semplici in $\alpha_\pm = -a \pm \sqrt{a^2-1}$, e calcolando i relativi residui, otteniamo:
$$\mathrm{Res}_{\alpha_+} = \frac{1}{\alpha_+ - \alpha_-} = -\mathrm{Res}_{\alpha_-} \; .$$

Applichiamo il teorema dei residui, osservando che l'unico polo contenuto all'interno del disco unitario è α_+, quindi:

$$(*) = \frac{\pi}{\sqrt{a^2-1}} \ .$$

2) Integriamo la funzione $f(z) = \frac{z^2}{z^4+5z^2+6}$ sul cammino:

$$\gamma_R = C_R \cup \sigma_R = \{|z| = R,\ \mathbb{I}\mathrm{m} z \geq 0\} \cup \{-R \leq x \leq R\} \ .$$

Studieremo il comportamento di tale integrale quando R tende ad infinito. La funzion $f(z)$ ha poli in $z = \pm i\sqrt{2}$ e $z = \pm i\sqrt{3}$; naturalmente noi considereremo solo quelli nel semipiano superiore, e prendendo R molto grande possiamo assumere che siano contenuti nella regione interna al nostro cammino. Calcoliamone i residui:

$$\mathrm{Res}_{\mathrm{i}\sqrt{2}} = \frac{\mathrm{i}\sqrt{2}}{2} \qquad \text{e} \qquad \mathrm{Res}_{\mathrm{i}\sqrt{3}} = \frac{-\mathrm{i}\sqrt{3}}{2} \ .$$

Applicando il teorema dei residui otteniamo:

$$\oint_{\gamma_R} f\,dz = \int_{C_R} f\,dz + \int_{\sigma_R} f\,dz \ = \frac{\pi}{2}(\sqrt{3}-\sqrt{2}) \ .$$

Vediamo cosa succede passando al limite per $R \to \infty$:

$$\begin{aligned}
\left|\int_{C_R} \frac{z^2}{z^4+5z^2+6}\,dz\right| &\leq \int_{C_R} \frac{R^2}{|z^4+5z^2+6|}\,|dz| \leq \\
&\leq \int_{C_R} \frac{R^2}{R^4-5R^2-6}\,|dz| = \\
&= \pi R \frac{R^2}{R^4-5R^2-6} \overset{R\to\infty}{\longrightarrow} 0
\end{aligned}$$

e

$$\int_{\sigma_R} f(z)\,dz \overset{R\to\infty}{\longrightarrow} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^4+5x^2+6}\,dx \ .$$

Quindi:

$$\pi(\sqrt{3}-\sqrt{2}) \ = \ \lim_{R\to\infty} \oint_{\gamma_R} f(z)\,dz \ = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$$

da cui:

$$\frac{\pi}{2}(\sqrt{3}-\sqrt{2}) = \int_0^{\infty} \frac{x^2}{x^4+5x^2+6}\,dx \ .$$

3) In $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{z = iy \ | \ y \leq 0\}$ consideriamo la determinazione analitica del logaritmo $\log z$ tale che: $\log 1 = 0$ e $\log(-1) = i\pi$.
Applichiamo il teorema dei residui alla funzione $f(z) = \frac{\log z}{1+z^2}$, che è analitica in $\Omega \setminus \{i\}$. La funzione f ha un polo in $z = i$, con residuo $\mathrm{Res}_{\mathrm{i}} = \frac{\log \mathrm{i}}{2\mathrm{i}} = \frac{\pi}{4}$.
Scegliamo come cammino di integrazione:

$$\begin{aligned}
\gamma_{R,\varepsilon} \ &= \ C_R \cup C_\varepsilon \cup \sigma_+ \cup \sigma_- = \{|z| = R,\ \mathbb{I}\mathrm{m} z \geq 0\} \cup \\
&\cup \ \{|z| = \varepsilon,\ \mathbb{I}\mathrm{m} z \geq 0\} \cup \{-R \leq x \leq -\varepsilon\} \cup \{\varepsilon \leq x \leq R\} \ .
\end{aligned}$$

Osserviamo che:

$$\begin{aligned}
\left|\int_{C_R} \frac{\log z}{1+z^2}\,dz\right| &\le \int_{C_R} \frac{|\log z|}{|1+z^2|}\,|dz| \le \\
&\le \int_{C_R} \frac{\log|z|}{|z|^2-1}\,|dz| = \\
&= \frac{\log R}{R^2-1}\int_{C_R} |dz| = \\
&= \frac{\pi R\,\log R}{R^2-1} \stackrel{R\to\infty}{\longrightarrow} 0\,.
\end{aligned}$$

In maniera simile:

$$\begin{aligned}
\left|\int_{C_\varepsilon} \frac{\log z}{1+z^2}\,dz\right| &\le \int_{C_\varepsilon} \frac{|\log z|}{|1+z^2|}\,|dz| \le \\
&\le \int_{C_\varepsilon} \frac{\log|z|}{1-|z|^2}\,|dz| = \\
&= \frac{\log \varepsilon}{1-\varepsilon^2}\int_{C_\varepsilon} |dz| = \\
&= \frac{\pi\varepsilon\,\log \varepsilon}{1-\varepsilon^2} \stackrel{\varepsilon\to 0^+}{\longrightarrow} 0\,.
\end{aligned}$$

Quindi:

$$\begin{aligned}
\frac{\pi^2 i}{2} &= \lim_{\substack{\varepsilon\,\to\,0^+\\ R\,\to\,\infty}} \int_{\gamma_{R,\varepsilon}} f(z)\,dz = \\
&= \int_{-\infty}^{0} \frac{\log|x| + i\pi}{1+x^2}\,dx + \int_0^\infty \frac{\log x}{1+x^2}\,dx = \\
&= 2\int_0^\infty \frac{\log x}{1+x^2}\,dx + i\pi\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx = \\
&= 2\int_0^\infty \frac{\log x}{1+x^2}\,dx + i\frac{\pi^2}{2}
\end{aligned}$$

da cui segue che:

$$\int_0^\infty \frac{\log x}{1+x^2}\,dx = 0\,.$$