AC310 - ESERCITAZIONE II

18 OTTOBRE 2012

Esercizio svolto 1. Calcolare i seguenti integrali (tutte i cammini chiusi sono orientati positivamente):

(1) $\int_\sigma x\,dz$, dove σ è il segmento orientato da 0 a $1+i$.

(2) $\int_{\{|z|=R\}} x\,dz$ in due modi diversi:
(a) mediante calcolo diretto;
(b) osservando che $x = \frac{z+\overline{z}}{2} = \frac{1}{2}\left(z + \frac{R^2}{z}\right)$ sulla circonferenza $\{|z| = R\}$.

(3) $\int_{\{|z|=2\}} \frac{dz}{z^2-1}$.

(4) $\int_{\{|z|=1\}} \frac{e^z}{z^n} dz$ al variare di $n \in \mathbb{Z}$.

(5) $\int_{\{|z|=\rho\}} \frac{dz}{|z-a|^2}$, con la condizione che $|a| \neq \rho$.

(6) $\int_{\{|z|=1\}} \frac{\sin z}{z^n} dz$ al variare di $n \in \mathbb{Z}$.

(7) $\int_{\{|z|=2\}} z^n(1-z)^m\,dz$, al variare di n, $m \in \mathbb{Z}$.

Soluzione.

(1) Considerando la parametrizzazione $\sigma(t) = (1+i)t$ per $t \in [0,1]$, si ottiene:

$$\int_\sigma x\,dz = \int_0^1 t\,(1+i)\,dt = \frac{1+i}{2}.$$

(2) (a) Mediante calcolo diretto. Consideriamo la parametrizzazione $\gamma(t) = Re^{it}$ per $t \in [0, 2\pi)$. Si ottiene:

$$\begin{aligned}\int_{\{|z|=R\}} x\,dz &= \int_0^{2\pi} (R\cos t)(Rie^{it})\,dt = \\ &= iR^2 \int_0^{2\pi} (\cos^2 t + i \sin t \cos t)\,dt = i\pi R^2,\end{aligned}$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo usato che $\int_0^{2\pi} \cos^2 t\,dt = \pi$ e $\int_0^{2\pi} \cos t \sin t\,dt = 0$.

(b) Usando la sostituzione suggerita, si ottiene:

$$\begin{aligned}
\int_{\{|z|=R\}} x\,dz &= \int_{\{|z|=R\}} \frac{1}{2}\left(z+\frac{R^2}{z}\right) dz = \\
&= \frac{1}{2}\int_{\{|z|=R\}} z\,dz + \frac{R^2}{2}\int_{\{|z|=R\}} \frac{1}{z}\,dz = \\
&= 0 + R^2 i\pi \,\mathrm{Ind}_0(\{|z|=R\}) = \\
&= i\pi R^2,
\end{aligned}$$

dove nel penultimo passaggio è stato usato il teorema di Cauchy e nell'ultimo passaggio il fatto che l'indice $\mathrm{Ind}_0(\{|z|=R\}) = 1$.

(3) Osserviamo che:

$$\begin{aligned}
\int_{\{|z|=2\}} \frac{dz}{z^2-1} &= \frac{1}{2}\left(\int_{\{|z|=2\}} \frac{dz}{z-1} - \int_{\{|z|=2\}} \frac{dz}{z+1}\right) = \\
&= \pi\, i\left[\mathrm{Ind}_1(\{|z|=2\}) - \mathrm{Ind}_{-1}(\{|z|=2\})\right] = \\
&= 0,
\end{aligned}$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo usato il fatto che $\mathrm{Ind}_1(\{|z|=2\}) = \mathrm{Ind}_{-1}(\{|z|=2\}) = 1$.

(4)
- Se $n \le 0$, tale integrale è uguale a zero, come segue immediatamente dal teorema di Cauchy su dischi.
- Se $n > 0$, applichiamo la formula di Cauchy su dishi. Derivando $(n-1)$ volte entrambi i membri, otteniamo:

$$f^{(n-1)}(z) = \frac{(n-1)!}{2\pi i}\int_{\{|z|=1\}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^n}\,d\zeta\,.$$

Quindi:

$$\int_{\{|z|=1\}} \frac{e^z}{z^n} dz = \frac{2\pi i}{(n-1)!}\,\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left[e^z\right]_{|z=0} = \frac{2\pi i}{(n-1)!}\,.$$

(5) Si procede in maniera analoga a quanto fatto in (3), usando un trucco analogo a quello suggerito nell'integrale (2). Otteniamo:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|z-a|^2} &= \frac{1}{(z-a)(\overline{z}-\overline{a})} = \frac{1}{(z-a)(\frac{\rho^2}{z}-\overline{a})} = \\
&= \frac{z}{(z-a)(\rho^2-\overline{a}z)} = \\
&= \frac{1}{\rho^2-|a|^2}\left(\frac{a}{z-a} + \frac{\rho^2}{\rho^2-\overline{a}z}\right).
\end{aligned}$$

Quindi:

$$\begin{aligned}
\int_{\{|z|=\rho\}} \frac{dz}{|z-a|^2} &= \int_{\{|z|=\rho\}} \frac{1}{\rho^2-|a|^2}\left(\frac{a}{z-a} + \frac{\rho^2}{\rho^2-\overline{a}z}\right) dz = \\
= \frac{a}{\rho^2-|a|^2}&\int_{\{|z|=\rho\}} \frac{dz}{z-a} - \frac{\rho^2}{\overline{a}(\rho^2-|a|^2)}\int_{\{|z|=\rho\}} \frac{dz}{z-\frac{\rho^2}{\overline{a}}} = \\
= \frac{2\pi i\, a}{\rho^2-|a|^2}&\mathrm{Ind}_a\left(\{|z|=\rho\}\right) - \frac{2\pi i\,\rho^2}{\overline{a}(\rho^2-|a|^2)}\mathrm{Ind}_{\frac{\rho^2}{\overline{a}}}\left(\{|z|=\rho\}\right) = (*).
\end{aligned}$$

Osserviamo che se $|a| < \rho$, allora $\left|\frac{\rho^2}{\bar{a}}\right| > \rho$ e vice-versa. Quindi nell'espressione (*) solo uno dei due indici è non nullo ed è uguale ad 1. In conclusione:

- se $|a| < \rho$, si ottiene : $(*) = \frac{2\pi i a}{|\rho^2 - |a|^2|}$;
- Se $|a| > \rho$, si ottiene: $\frac{2\pi i \rho^2}{\bar{a}|\rho^2 - |a|^2|}$.

(6) Procedendo esattamente come in (4), otteniamo:
- se $n \leq 0$, allora $\int_{\{|z|=1\}} \frac{\sin z}{z^n} dz = 0$ (teorema di Cauchy);
- se $n > 0$, usando la formula di rappresentazione di Cauchy e quanto osservato nell'esercizio (4):
$$\int_{\{|z|=1\}} \frac{\sin z}{z^n} dz = \frac{2\pi i}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \big(\sin z\big)_{|z=0}.$$
In particolare:
  - se $n > 0$ ed n dispari, allora $\int_{\{|z|=1\}} \frac{\sin z}{z^n} dz = 0$;
  - se $n > 0$ ed $n \equiv 2$ (mod.4), allora $\int_{\{|z|=1\}} \frac{\sin z}{z^n} dz = \frac{2\pi i}{(n-1)!}$;
  - se $n > 0$ e $n \equiv 0$ (mod.4), allora $\int_{\{|z|=1\}} \frac{\sin z}{z^n} dz = -\frac{2\pi i}{(n-1)!}$.

(7) Distinguiamo vari casi:
- se $n \geq 0$ e $m \geq 0$, allora $\int_{\{|z|=2\}} z^n (1-z)^m \, dz = 0$ (teorema di Cauchy).
- Se $n \geq 0$ e $m < 0$, allora (usiamo la formula di rappresentazione di Cauchy, come nell'esercizio (4)):

$$\begin{aligned}
\int_{\{|z|=2\}} z^n (1-z)^m \, dz &= \int_{\{|z|=2\}} \frac{z^n}{(1-z)^{|m|}} \, dz = \\
&= (-1)^{|m|} \int_{\{|z|=2\}} \frac{z^n}{(z-1)^{|m|}} \, dz = \\
&= (-1)^{|m|} \frac{2\pi i}{(|m|-1)!} \frac{d^{|m|-1}}{dz^{|m|-1}} \big(z^n\big)_{|z=1} = \\
&= \begin{cases} 0 & \text{se } |m| > n+1 \\ (-1)^m 2\pi i \begin{pmatrix} n \\ |m|-1 \end{pmatrix} & \text{se } |m| \leq n+1. \end{cases}
\end{aligned}$$

- Se $n < 0$ e $m \geq 0$, allora analogamente a quanto fatto nel precedente caso:

$$\begin{aligned}
\int_{\{|z|=2\}} z^n (1-z)^m \, dz &= \int_{\{|z|=2\}} \frac{(1-z)^m}{z^{|n|}} \, dz = \\
&= \frac{2\pi i}{(|n|-1)!} \frac{d^{|n|-1}}{dz^{|n|-1}} \big[(1-z)^{|m|}\big]_{|z=0} = \\
&= \begin{cases} 0 & \text{se } |n| > m+1 \\ (-1)^{n-1} 2\pi i \begin{pmatrix} m \\ |n|-1 \end{pmatrix} & \text{se } |n| \leq m+1. \end{cases}
\end{aligned}$$

- Consideriamo ora il caso $n < 0$ e $m < 0$. Invece di integrare lungo la circonferenza $\mathcal{C} = \{|z| = 2\}$, consideriamo i cammini ottenuti unendo alla circonferenza il segmento contenuto nella retta $x = \frac{1}{2}$. Consideriamo ora i due cammini chiusi ottenuti in questo modo $\mathcal{C}_0$ e $\mathcal{C}_1$, orientati positivamente (come in figura).

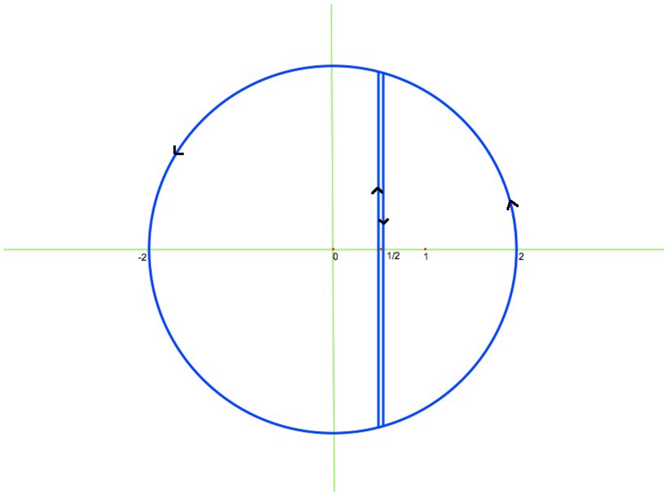

FIGURE 1

Questi due cammini hanno in comune tale segmento (percorso in verso opposto), quindi:

$$\int_{\mathcal{C}} z^n(1-z)^m\,dz = \int_{\mathcal{C}_0} z^n(1-z)^m\,dz + \int_{\mathcal{C}_1} z^n(1-z)^m\,dz\,.$$

Osserviamo che ciascuno di questi cammini contiene nella propria regione interna una sola singolarità. Denotiamo con $\mathcal{C}_0$ il cammino che contiene $z=0$ nella sua regione interna e con $\mathcal{C}_1$ quello che contiene $z=1$ nella sua regione interna.

In questo modo, si può applicare la formula di Cauchy a ciascuno dei due integrali:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{C}} z^n(1-z)^m\,dz &= \int_{\mathcal{C}_0} z^n(1-z)^m\,dz + \int_{\mathcal{C}_1} z^n(1-z)^m\,dz = \\
&= \int_{\mathcal{C}_0} \frac{\frac{1}{(1-z)^{|m|}}}{z^{|n|}}\,dz + \int_{\mathcal{C}_1} \frac{\frac{1}{z^{|n|}}}{(1-z)^{|m|}}\,dz = \\
&= \int_{\mathcal{C}_0} \frac{\frac{1}{(1-z)^{|m|}}}{z^{|n|}}\,dz + (-1)^{|m|}\int_{\mathcal{C}_1} \frac{\frac{1}{z^{|n|}}}{(z-1)^{|m|}}\,dz = \\
&= \frac{2\pi i}{(|n|-1)!}\frac{d^{|n|-1}}{dz^{|n|-1}}\left(\frac{1}{(1-z)^{|m|}}\right)_{|z=0} + \frac{2\pi i(-1)^{|m|}}{(|m|-1)!}\frac{d^{|m|-1}}{dz^{|m|-1}}\left(\frac{1}{z^{|n|}}\right)_{|z=1} = \\
&= 2\pi i\left\{\binom{|m|+|n|-2}{|n|-1} - \binom{|m|+|n|-2}{|m|-1}\right\}.
\end{aligned}$$