AC310 - ESERCITAZIONE I

4 OTTOBRE 2012

Esercizio svolto 1. Trovare i valori di:

(1) $\mathbb{I}\mathrm{m}\{(1+i)^n+(1-i)^n\}$;
(2) $\mathbb{R}\mathrm{e}\{(1+i)^n+(1-i)^n\}$;
(3) i^i;
(4) $(-1)^{2i}$;
(5) $\sqrt[4]{i}$.

Soluzione.

(1) Ossserviamo che :

$$\begin{aligned}(1+i)^n+(1-i)^n &= \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j} i^j+\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(-i)^j = \\ &= \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j} i^j(1+(-1)^j) = 2\sum_{j=0}^{[\frac{n}{2}]}\binom{n}{2j} i^{2j} = \\ &= 2\sum_{j=0}^{[\frac{n}{2}]}\binom{n}{2j}(-1)^j.\end{aligned}$$

Quindi $\gamma=(1+i)^n+(1-i)^n \in \mathbb{R}$ e di conseguenza $\mathbb{I}\mathrm{m}\gamma=0$. Del resto:

$$\begin{aligned}(1+i)^n+(1-i)^n &= (1+i)^n+\overline{(1+i)}^n = (1+i)^n+\overline{(1+i)^n} = \\ &= 2\,\mathbb{R}\mathrm{e}(1+i)^n.\end{aligned}$$

(2) Per quanto detto sopra:

$$\mathbb{R}\mathrm{e}\{(1+i)^n+(1-i)^n\} = 2\sum_{j=0}^{[\frac{n}{2}]}\binom{n}{2j}(-1)^j.$$

(3)

$$\begin{aligned}i^i &= e^{i\log i} = \{e^{-(\frac{\pi}{2}+2\pi n)} : \quad n\in\mathbb{Z}\} = \\ &= \{e^{-\frac{(4n+1)\pi}{2}} : \quad n\in\mathbb{Z}\}.\end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned}(-1)^{2i} &= e^{2i\log(-1)} = \{e^{-2(\pi+2\pi n)} : \quad n\in\mathbb{Z}\} = \\ &= \{e^{-2(2n+1)\pi} : \quad n\in\mathbb{Z}\}.\end{aligned}$$

Osserviamo che $(-1)^{2i}\subset((-1)^2)^i$.

(5)

$$\begin{aligned}\sqrt[4]{i} &= \{e^{i(\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2})}, \quad k=0,1,2,3\} = \\ &= \{e^{i\frac{\pi}{8}},\ e^{i\frac{5\pi}{8}},\ e^{i\frac{9\pi}{8}},\ e^{i\frac{13\pi}{8}}\}.\end{aligned}$$

Esercizio svolto 2. Dimostrare che:

1. *$f(z)$ è analitica su Ω $\iff$ $\overline{f(\overline{z})}$ è analitica su $\overline{\Omega}$, dove $\overline{\Omega} \equiv \{\overline{z}:\ z \in \Omega\}$.*

2. *Una funzione analitica non costante, non può essere costante in modulo.*

3. *Una funzione analitica non costante, non può essere tale che $\mathbb{R}\mathrm{e} f = f$.*

4. *Una funzione analitica non costante, non può essere tale che $\mathbb{I}\mathrm{m} f = f$.*

Soluzione.

1. E' sufficiente dimostrare che f analitica in $\Omega \Longrightarrow \overline{f}(z) := \overline{f(\overline{z})}$ è analitica in $\overline{\Omega}$. Infatti, una volta dimostrato ciò, l'altra implicazione segue immediatamente osservando che $\overline{\overline{f}} = f$. Dimostriamo quindi che $\overline{f}$ è analitica in $\overline{z_0} \in \overline{\Omega}$:

$$\begin{aligned}& \lim_{w\to 0} \frac{\overline{f}(\overline{z_0}+w) - \overline{f}(\overline{z_0})}{w} = \\ =\ & \lim_{w\to 0} \frac{\overline{f(\overline{\overline{z_0}+w})} - \overline{f(\overline{\overline{z_0}})}}{w} = \\ =\ & \lim_{w\to 0} \frac{\overline{f(z_0+\overline{w})} - \overline{f(z_0)}}{w} = \\ =\ & \lim_{w\to 0} \overline{\frac{f(z_0+\overline{w}) - f(z_0)}{\overline{w}}} = \\ =\ & \overline{f'(z_0)},\end{aligned}$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo usato il fatto che f è analitica in z_0.

2. Supponiamo che $f(z) = u(x,y)+iv(x,y)$ sia una funzione analitica in Ω, tale che $|f|^2 = u^2+v^2 \equiv C$. Quindi derivando questa espressione, otteniamo:

$$\left\{\begin{array}{l}\partial_x(u^2+v^2)=0\\ \partial_y(u^2+v^2)=0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l}uu_x+vv_x=0\\ uu_y+vv_y=0\end{array}\right. \tag{1}$$

Applicando le equazioni di Cauchy Riemann, e sostituendo sopra, otteniamo:

$$\left\{\begin{array}{l}uu_x - vu_y = 0\\ uu_y + vu_x = 0.\end{array}\right.$$

Moltiplichiamo la prima equazione per u e la seconda per v e sommiamo le due equazioni:

$$\left\{\begin{array}{l}u^2u_x - vuu_y = 0\\ uvu_y + v^2u_x = 0.\end{array}\right. \Longrightarrow \quad (u^2+v^2)u_x = Cu_x = 0$$

Distinguiamo ora due casi:

i) Se $C=0$, allora $f(z) \equiv 0$ e quindi è costante!

ii) Se $C \neq 0$, ne segue che $u_x \equiv 0$ e di conseguenza (Cauchy–Riemann) anche $v_y \equiv 0$. Sostituendo ciò in (1) otteniamo:

$$\begin{cases} vu_y = 0 \\ uu_y = 0. \end{cases}$$

Osserviamo che, dal momento che $C \neq 0$, allora u e v non possono essere contemporaneamente nulle. Quindi, possiamo dedurre che $u_y \equiv 0$ e di conseguenza (Cauchy–Riemann) anche $v_x \equiv 0$.
Dal momento che $u_x = u_y = v_x = v_y \equiv 0$, allora f è costante.

3. Se $\mathbb{R}\mathrm{e} f = f$, allora $v(x, y) \equiv 0$ e quindi $v_x = v_y \equiv 0$; applicando Cauchy Riemann si ha che anche $u_x = u_y = 0$ e quindi anche u è costante. Di conseguenza f è costante.

4. Si procede come al punto 3.

Esercizio svolto 3. Trovare il più generale polinomio armonico della forma:

$$P(x, y) = ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3 \ .$$

Determinare, inoltre, la funzione armonica coniugata e la corrispondente funzione analitica.

Soluzione. Imponendo la condizione $\Delta P(x, y) = 0$, si ottengono le seguenti condizioni:

$$\begin{cases} c = -3a \\ b = -3d \end{cases}$$

e quindi P è della forma:

$$P(x, y) = ax^3 - 3dx^2y - 3axy^2 + dy^3 \ .$$

Troviamo ora il polinomio armonico coniugato. Dalle equazioni di Cauchy–Riemann si ottiene:

$$\begin{cases} v_y = P_x \\ v_x = -P_y \ . \end{cases}$$

Integrando:

$$v(x, y) = dx^3 + 3ax^2y - 3dxy^2 - ay^3 + C,$$

con $C \in \mathbb{C}$ costante. Quindi la funzione analitica corrispondente è:

$$f(z) = f(x + iy) = (a + id)z^3 + i\,C.$$

Esercizio aggiuntivo 1. Sia $u(x, y) = \log \sqrt{x^2 + y^2}$.
(i) Dimostrare che u è una funziona armonica in $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\}$.
(ii) Dimostrare inoltre che non esiste funziona analitica $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ tale che $\mathbb{R}\mathrm{e}(f) = u$.