Compattezza in spazi di Banach, in spazi di funzioni e in spazi Lp, debole compattezza e Spazi riflessivi

Lucia Miggiano,Emanuela Miggiano,Davide Cera

April 5, 2012

1 ♣ Compattezza in Spazi di Banach

1.1 Lemma di Riesz

Sia E uno spazio vettoriale normato e sia M⊂E un sottospazio chiuso tale che M≠E. Allora
$\forall \epsilon > 0 \quad \exists u \in E \quad$ tale che $\quad \|u\| = 1 \quad e \quad \text{dist}(u, M) \geq 1 - \epsilon$

1.1.1 Dimostrazione

Sia $v \in$ E con $v \notin M$. Poiché M è chiuso, allora $d = dist(v, M) > 0$. Scegliamo $m_0 \in M$ tale che

$$d \leq \|v - m_0\| \leq \frac{d}{1 - \epsilon}$$

Allora

$$u = \frac{v - m_0}{\|v - m_0\|}$$

soddisfa la condizione. Infatti se $m \in M$, si ha

$$\|u - m\| = \left\| \frac{v - m_0}{\|v - m_0\|} - m \right\| \geq 1 - \epsilon$$

in quanto

$$m_0 + \|v - m_0\| m \in M$$

.

1.2 Teorema (Riesz)

Sia E uno spazio vettoriale normato tale che B_E sia compatto. Allora E ha dimensione finita.

1.2.1 Dimostrazione

Ragioniamo per assurdo. Se E ha dimensione infinita, esiste una successione (E_n) di sottospazi di dimensione finita tali che $E_{n-1} \subset E_n$. Grazie al lemma 1.1 si puó costruire una successione (u_n) con $u_n \in E_n, \quad \|u_n\| = 1 \quad$ e $\quad \mathrm{dist}(u_n, E_{n-1}) \geq \frac{1}{2}$. In particolare $\|u_n - u_m\| \geq \frac{1}{2}$ per m<n. Dunque la successione (u_n) non ammette alcuna sottosuccesione convergente e ciò è in contrasto con l'ipotesi "B_E è compatto".

2 ♣ Compattezza in Spazi di Funzioni

2.1 Lemma

(Trucco diagonale di Cantor).
Sia $\{a_j^{(i)}\}_{i,j \in \mathbf{N}}$ tale che $\sup_{i,j} |a_j^{(i)}| < \infty$. Allora $\exists \{n_k\}$ tale che $\{a_{n_k}^{(j)}\}_{k \in \mathbf{N}}$ converge $\forall j \in \mathbf{N}$

2.1.1 Dimostrazione

Poiché $\{a_n^{(1)}\}_n$ è limitata, esistono indici $n_k^{(1)}$ tali che $\left\{a_{n_k^{(1)}}^{(1)}\right\}_k$ converge. Essendo poi $\left\{a_{n_k^{(1)}}^{(2)}\right\}_k$ limitata, $\exists \left\{n_k^{(2)}\right\} \subset \left\{n_k^{(1)}\right\}$ t.c. $\left\{a_{n_k^{(2)}}^{(2)}\right\}$ converge. Iterando il procedimento, troviamo degli indici $\left\{n_k^{(i)}\right\}$ tali che
- $\left\{n_k^{i+1}\right\} \subset \left\{n_k^{(i)}\right\} \quad \forall i$
- $\left\{a_{n_k^{(j)}}^{(i)}\right\}$ converge $\forall i \in [1, j] \cap \mathbf{N}$

Ponendo $n_k := n_k^{(k)}$, abbiamo che $\left\{a_{n_k}^i\right\}_k$ converge per ogni i

2.2 Teorema di Ascoli-Arzelà

Siano $f_n \in C([a, b])$. Supponiamo che

(i) (**equilimitatezza**) $\exists M > 0 : \quad \sup_{x \in [a,b]} |f_n(x)| \leq M \quad \forall n \in \mathbf{N}$

(ii) (**equiuniforme continuitá**) $\forall \epsilon, \quad \exists \delta_\epsilon$ tale che:
$|x - y| \leq \delta \quad \Rightarrow \quad |f_n(x) - f_n(y)| \leq \epsilon, \quad \forall n \in \mathbf{N}$

Allora $\exists n_k : \quad f_{n_k}$ converge uniformemente in [a,b].

NOTA
La equiuniforme continuitá è certamente verificata se
$f_n \in C^1([a,b])$ ed esiste M' tale che $\sup_{x\in[a,b]} |f_n'(x)| \le M' \quad \forall n \in \mathbf{N}$.
Infatti le f_n sono (Teorema del valor medio) Lipschitziane di costante M'
Schema di dimostrazione (nell'ipotesi in **NOTA**)

(i) (**diagonalizzazione di Cantor**) Sia D:={ $x_j : j \in \mathbf{N}$ } denso in [a,b].
Allora $\quad \exists \alpha_j \in \mathbf{R}, n_k < n_{k+1} : \quad f_{n_k}(x_j) \to_{k\to+\infty} \alpha_j \quad \forall j$
Infatti $\quad |f_n(x_1)| \le M \Rightarrow \exists \alpha_1, \phi_1 : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ strettamente crescente tale che
$|f_{\phi_1(k)}(x_1) - \alpha_1| \le \frac{1}{k} \quad \forall k.$ Ugualmente,
$\exists \phi_2, \alpha_2 : \quad |f_{\phi_1(\phi_2(k))}(x_2) - \alpha_2| \le \frac{1}{k} \quad \forall k.$ Notiamo che si ha anche
$|f_{\phi_1(\phi_2(k))}(x_1) - \alpha_1| \le \frac{1}{\phi_2(k)} \le \frac{1}{k}$. Iterando, troviamo al passo j:
$\exists \phi_j, \alpha_j : \quad |f_{\phi_1 \circ \ldots \circ \phi_j(k)}(x_i) - \alpha_i| \le \frac{1}{k} \quad \forall k, i \le j$
Basta ora prendere $n_k = (\phi_1 \circ \ldots \circ \phi_k)(k)$

(ii) Sia $f(x_j) = \lim_{k\to+\infty} f_{n_k}(x_j)$. Si ha che
$|f(x_i) - f(x_j)| \le M|x_i - x_j| \forall i, j$
e quindi f si prolunga ad una $\overline{f}$ Lipschitziana (di costante M') in tutto [a,b].
Infatti $|f(x_i) - f(x_j)| \le |f(x_i) - f_{n_k}(x_i)| + |f_{n_k}(x_i) - f_{n_k}(x_j)| + |f_{n_k}(x_j) - f(x_j)| \le M'|x_i - x_j| + |f(x_i) - f_{n_k}(x_i)| + |f_{n_k}(x_j) - f(x_j)|, \quad \forall i, j$
Basta ora mandare k all'infinito.

(iii) $f_{n_k} \to_{k\to+\infty} \overline{f}$ uniformemente in [a,b].
Infatti, fissato $\epsilon > 0$, siano $N \ge \frac{b-a}{\epsilon}$, $I_j := [a + (j-1)\frac{b-a}{N}, a + j\frac{b-a}{N}]$,
j=1,...,N. Se $x \in [a,b]$, allora $x \in I_j$ per qualche j. Sia $x_j \in D \cap I_j$. Si ha
$|f_{n_k}(x) - \overline{f}(x)| \le |f_{n_k}(x) - f_{n_k}(x_j)| + |f_{n_k}(x_j) - \overline{f}(x_j)| + |\overline{f}(x_j) - \overline{f}(x)| \le 2M'\frac{b-a}{N} + |f_{n_k}(x_j) - \overline{f}(x_j)|$
e quindi, da $k \ge k_{\epsilon, x_1, \ldots, x_N} \Rightarrow |f_{n_k}(x_j) - \overline{f}(x_j)| \le \epsilon$, segue $|f_{n_k}(x) - \overline{f}(x)| \le 2\epsilon$.

2.3 Formula integrale di Cauchy

Sia f una funzione olomorfa in un aperto U contenente un disco chiuso $\overline{D}$. sia γ la frontiera di $\overline{D}$ percorsa in senso antiorario. Allora $\forall z_0 \in D$ si ha:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

2.4 Definizione

Una famiglia $\mathcal{F}$ di funzioni continue in una regione $R \subseteq \mathbf{C}$ è detta normale, se ogni successione $\{f_n\}$ di funzioni di $\mathcal{F}$ contiene una sottosuccesione uniformemente convergente sui compatti di R.

2.5 Teorema

Una famiglia $\mathcal{F}$ di funzioni analitiche è normale rispetto a $\mathbf{C}$ se e solo se le funzioni di $\mathcal{F}$ sono uniformemente limitate su ogni insieme compatto.

2.5.1 Dimostrazione

Per dimostrare la sufficienza proviamo l'equicontinuitá. Sia C il bordo di un disco chiuso in Ω, di raggio r. Se z,z_0 sono in C, dal teorema integrale di Cauchy si ottiene
$f(z) - f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \left(\frac{1}{\zeta - z} - \frac{1}{\zeta - z_0} \right) f(\zeta) d\zeta = \frac{z-z_0}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-z)(\zeta-z_0)}$
Se $|f| \leq M$ su C, e se restringiamo z e z_0 al disco minore concentrico di raggio r/2, ne consegue che
(*)

$$|f(z) - f(z_0)| \leq \frac{4M|z - z_0|}{r}$$

Questo dimostra l'equicontinuitá sul disco piú piccolo.
Sia E un insieme compatto in Ω. Ogni punto di E è il centro di un disco di raggio r, come sopra. I dischi aperti di raggio r/4 formano un ricoprimento aperto di E. Selezioniamo un sottoricoprimento finito e denotiamo i corrispettivi centri, raggi e limiti con ζ_k, r_k,M_k; sia r il piú piccolo dei r_k e M il piú grande dei M_K. Per un dato $\epsilon > 0$ sia δ minore di r/4 e $\epsilon r/4M$. Se $|z - z_0| < \delta$ e $|z_0 - \zeta_k| < r_k/4$ segue che $|z - \zeta_k| < \delta + r_k/4 \leq r_k/2$. (*) è quindi applicabile e si trova
$|f(z) - f(z_0| \leq 4M_k\delta/r_k \leq 4M\delta/r \leq \epsilon$ come desiderato.

3 ♣ Compattezza in Spazi L^p

Poniamo $(\tau_h f)(x) = f(x + h), x \in \mathbf{R}^N, h \in \mathbf{R}^N$.

3.1 Teorema di Frechet-Kolmogorov.

Sia F un insieme limitato in $L^p(\mathbf{R}^N)$con $1 \leq p < \infty$. Supponiamo che
(*) $\lim_{|h|\to 0} \parallel \tau_h f - f \parallel_p = 0$
uniformemente in $f \in F$
cioè $\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$ tale che $\parallel \tau_h f - f \parallel_p < \epsilon, \forall h \in \mathbf{R}^N$ con $|h| < \delta, \forall f \in F$.
Allora $F_{|\Omega}$ ha chiusura compatta in $L^p(\Omega)$ per ogni insieme misurabile $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ di misura finita.

3.2 Corollario

Sia F un insieme limitato di $L^p(\mathbf{R}^N)$ con $1 \leq p < \infty$. Supponiamo che valga la (*) e inoltre che:
$(\star)\forall \epsilon > 0 \quad \exists \Omega \subset \mathbf{R}^N$ limitato e misurabile, tale che $\parallel f \parallel_{L^p(\mathbf{R}^N \ \Omega)} < \epsilon \quad \forall f \in F$
Allora F ha chiusura compatta in $L^p(\mathbf{R}^N)$.

3.2.1 Dimostrazione

Dato $\epsilon > 0$, sia Ω un insieme limitato e misurabile tale che valga la $(\star)$. Per il teorama di Frechet-Kolmogorov sappiamo che $F_{|\Omega}$ ha chiusura compatta in

$L^p(\Omega)$. Perciò possiamo ricoprire $F_{|\Omega}$ con un numero finito di sfere di raggio ϵ in $L^p(\Omega)$, cioè

$$F_{|\Omega} \subset \cup_i B(g_i, \epsilon), \quad \text{con} \quad g_i \in L^p(\Omega).$$

Posto

$$\overline{g_i}(x) = \begin{cases} g_i(x) & \text{in} \quad \Omega \\ 0 & \text{in} \quad \mathbf{R}^N/\Omega \end{cases}$$

evidentemente F è ricoperto dalle sfere $B(\overline{g_i}, 2\epsilon)$ in $L^p(\mathbf{R}^N)$.

3.3 Corollario

Sia G una funzione di $L^1(\mathbf{R}^N)$ e sia

$$F = G * B$$

ove B è un insieme limitato di $L^p(\mathbf{R}^N)$.
Allora $F_{|\Omega}$ ha chiusura compatta in $L^p(\Omega)$ per ogni insieme misurabile Ω di misura finita.

3.3.1 Dimostrazione

Evidentemente F è limitato in $L^p(\mathbf{R}^N)$. D'altra parte, se poniamo $f = G * u$ con $u \in B$, si ha

$$\| \tau_h f - f \|_p = \| (\tau_h G - G) * u \|_p \leq C \| \tau_h G - G \|_1$$

e si conclude mediante il

3.4 Lemma

Sia $G \in L^q(\mathbf{R}^N)$ con $1 \leq q \leq \infty$.
Allora

$$\lim_{h \to 0} \| \tau_h G - G \|_q = 0.$$

4 ♣ Debole Compattezza

4.1 Definizione

Uno spazio metrico E è separabile se esiste un sottoinsieme $D \subset E$ numerabile denso.

Convergenza debole* in L^∞. Siano $f_n \in L^\infty$.

$$f_n \rightharpoonup^* f \text{in } L^\infty \Leftrightarrow \int f_n h \to \int f h \quad h \in L^1$$

4.2 Teorema di Banach-Alaoglu

Siano μ σ-finita ed $L^1(\mu)$ separabile. Allora

$$\sup_n \|f_n\|_\infty < +\infty \Rightarrow \exists n_k, f \in L^\infty : f_{n_k} \rightharpoonup^* f$$

4.2.1 Dimostrazione

$\sup_n |\int f_n h| \leq (\sup_n \|f_n\|_\infty)\|h\|_1 \forall h \in L^1 \Rightarrow$ (procedimento diagonale di Cantor!) $\exists n_k : \quad l(h) := lim_k \int f_{n_k} h$ esiste finito $\forall h \in D \subset L^1$ numerabile e denso; l si prolunga in modo lineare e continuo a tutto L^1 e quindi

$$\exists g \in L^\infty : \lim_k \int f_{n_k} h = l(h) = \int g h \quad \forall h \in D$$

e quindi(in modo standard)

$$\lim_k \int f_{n_k} h = \int g h \quad \forall h \in L^1$$

.

5 ♣ Topologie Deboli

5.1 Richiamo

Sia E uno spazio vettoriale topologico. Lo spazio duale topologico E' su E è lo spazio dei funzionali lineari e continui su E.

5.2 Richiamo

Sia H un iperpiano di equazione $[f = \alpha]$ e siano $A, B \subset E$. H **separa in senso stretto** A e B se $\exists\ \varepsilon > 0$ tale che $f(x) \leq \alpha - \varepsilon\ \forall x \in A$ e $f(x) \geq \alpha + \varepsilon\ \forall x \in B$

5.3 Definizione

Uno **spazio separato** o **spazio di Hausdorff** X é uno spazio topologico che verifica l'assioma di separazione di tipo T_2: $\forall (x, y) \in X\ \exists\ U, V$ aperti $\mid x \in U, y \in V$ e $U \cap V = \emptyset$

5.4 Teorema di Hahn-Banach nella Seconda Forma Geometrica

Siano $A \subset E$ e $B \subset E$ due insiemi convessi, non vuoti e disgiunti. Si supponga che A sia chiuso e B sia compatto. Allora esiste un iperpiano H chiuso che separa A e B in senso stretto

5.5 Definizione

Sia X un insieme e sia $(Y_i)_{i\in I}$ una famiglia di spazi topologici. $\forall i \in I$ si consideri un'applicazione $\varphi_i : X \to Y_i$ Sia T una topologia. Essa si definisce **meno fine** se ha il **minimo di aperti** che rende continue tutte le $(\varphi_i)_{i\in I}$

5.6 Proposizione

Sia (x_n) una successione di X.Allora
$x_n \to x \Leftrightarrow \varphi_i(x_n) \to \varphi_i(x) \; \forall \; i \in I$

5.6.1 Dimostrazione

Se $x_n \to x$ allora $\varphi_i(x_n) \to \varphi(x)_i$, giacché ciascuna φ_i é continua. Viceversa, sia U un intorno di x. Sia $U = \bigcup_{i\in J} {\varphi_i}^{-1}(V_i)$, $J \subset I$ finito. Per ogni i in J esiste un intero N_i tale che $\varphi_i(x_n) \in V_i$ per $n \geq N_i$. Sia $N = max_i\{N_i\}$. Allora si ha $x_n \in U$ per $n \geq N$

5.7 Proposizione

Sia Z uno spazio topologico e sia $\psi : Z \to X$.
Allora ψ é continua $\Leftrightarrow \varphi_i \circ \psi$ é continua di Z in Y_i per ogni $i \in I$

5.7.1 Dimostrazione

Se ψ è continua, allora anche $\varphi_i \circ \psi$ é continua, per ogni $i \in I$ Viceversa, sia U un aperto di X; dimostriamo che $\psi^{-1}(U)$ é un aperto di Z. Sappiamo che U è della forma

$$\bigcup_{qualunque} \bigcap_{finita} {\varphi_i}^{-1}(W_i) \text{ con } W_i \text{ aperto di } Y_i.$$

Di conseguenza

$$A = \psi^{-1}(U) = \bigcup_{qualunque} \bigcap_{finita} \psi[{\varphi_i}^{-1}(W_i)] = \bigcup_{qualunque} \bigcap_{finita} (\varphi_i \circ \psi)^{-1}(W_i)$$

e A un aperto di Z perché ogni applicazione $\varphi_i \circ \psi$ é continua

5.8 Definizione

La topologia $\sigma(E, E')$ è la topologia meno fine su E che rende continue tutte le applicazioni $(\varphi_f)_{f\in E'}$

5.9 Proposizione

La topologia $\sigma(E, E')$ è separata

5.9.1 Dimostrazione

Siano $x_1, x_2 \in E$ con $x_1 \neq x_2$. Si cercano due aperti O_1 e O_2 per la topologia debole $\sigma(E, E')$ tali che $x_1 \in O_1, x_2 \in O_2$ e $O_1 \cap O_2 = \emptyset$. Per il Teorema di Hahn- Banach nella Seconda Forma Geometrica esiste un iperpiano chiuso che separa $\{x_1\}$ e $\{x_2\}$ in senso stretto.
Dunque esistono $f \in E'$ e $\alpha \in \mathbf{R}$ tali che

$$< f, x_1 >< \alpha << f, x_2 >$$

Poniamo

$$O_1 = \{x \in E; < f, x >< \alpha\} = {\varphi_f}^{-1}(] - \infty, \alpha[)$$

$$O_2 = \{x \in E; < f, x >> \alpha\} = {\varphi_f}^{-1}(]\alpha, +\infty[)$$

O_1 e O_2 sono aperti per $\sigma(E, E')$ e verificano $x_1 \in O_1, x_2 \in O_2$ e $O_1 \cap O_2 = \emptyset$

5.10 Definizione

Gli intorni di zero in $\sigma(E, E')$ sono intersezioni **finite** di

$$U_{x',\varepsilon} = \{x \in E \quad | \quad | < x', x > | < \varepsilon\}$$

5.11 Nota

Se E ha dimensione infinita, la topologia $\sigma(E, E')$ non é metrizzabile, cioé non esiste alcuna metrica definita su E che induca su E la topologia $\sigma(E, E')$

5.12 Definizione

Sia E uno spazio di Banach, sia E' il suo duale munito della norma duale: $\|f\| = \sup_{\substack{x \in E \\ \|x\| \leq 1}} | < f, x > |$ e sia E'' il suo biduale, cioé il duale di E', munito della norma: $\|\xi\| = \sup_{\substack{f \in E' \\ \|f\| \leq 1}} | < \xi, f > |$
Si ha un'iniezione $J : E \to E''$ definita: sia $x \in E$ fissato, l'applicazione $l : f \to < f, x >$ di E' in $\mathbf{R}$ costituisce una forma lineare continua su E', cioé un elemento di E'' denotato con Jx. Si ha dunque,

$$< Jx, f >_{E'', E'} = < f, x >_{E', E} \forall x \in E, \forall f \in E'.$$

E' evidente che J è lineare e che è un'isometria, cioé $\|Jx\|_{E''} = \|x\|_E$ per ogni $x \in E$;infatti

$$\|Jx\| = \sup_{\|f\| \leq 1} | < Jx, f > | = \sup_{\|f\| \leq 1} | < f, x > | = \|x\|$$

5.13 Definizione

La topologia $*$ o $\sigma(E', E)$ è la topologia meno fine su E' che rende continue tutte le applicazioni $(\varphi_x)_{x \in E}$

5.14 Proposizione

La topologia debole $*\sigma(E, E')$ *è separata*

5.14.1 Dimostrazione

Siano f_1 e f_2 in E', con $f_1 \neq f_2$. Esiste dunque $x \in E$ tale che $< f_1, x > \neq < f_2, x >$. Si supponga, senza perdita di generalità $< f_1, x >< < f_2, x >$. Sia α tale che

$$< f_1, x >< \alpha << f_2, x >$$

Siano

$$P_1 = \{f \in E'; < f, x >< \alpha\} = {\varphi_x}^{-1}(] - \infty, \alpha[)$$

$$P_2 = \{f \in E'; < f, x >> \alpha\} = {\varphi_x}^{-1}(]\alpha, -\infty[)$$

P_1 e P_2 sono aperti, per $\sigma(E', E)$, e verificano $f_1 \in P_1$, $f_2 \in P_2$ e $P_1 \cap P_2 = \emptyset$

5.15 Teorema di Banach-Alaoglu-Bourbaki

L'insieme $B_{E'} = \{f \in E| \ \|f\| \leq 1\}$ *è compatto per la topologia debole* ${}^*\sigma(E', E)$

6 ♣ Spazi Riflessivi

6.1 Definizione

Sia E uno spazio di Banach e sia $J : E \to E''$ l'immersione canonica. E é riflessivo se $J(E) = E''$

6.2 Teorema di Kakutani

Sia E uno spazio di Banach. Allora E è riflessivo $\Leftrightarrow B_E = \{x \in E| \ \|x\| \leq 1\}$ *é compatto per la topologia* $\sigma(E, E')$

6.3 Proposizione sul Sottospazio Vettoriale Riflessivo

Sia E uno spazio di Banach e sia $M \subset E$ sottospazio vettoriale chiuso. Allora M, munito dalla norma indotta da E é riflessivo

6.4 Corollario

Sia E uno spazio di Banach. Allora E é riflessivo $\Leftrightarrow E'$ é riflessivo

6.5 Corollario

Sia E uno spazio di Banach riflessivo. Sia $K \subset E$ un sottoinsieme convesso, chiuso e limitato. Allora K è compatto per per la topologia $\sigma(E, E')$

7 ♣ Spazi Separabili

7.1 Teorema (E' Separabile $\Rightarrow E$ Separabile)

Sia E uno spazio di Banach tale che E' sia separabile. Allora E é separabile

7.1.1 Dimostrazione

Sia $(f_n)_{n\geq 1}$ una successione numerabile densa in E'. Poiché

$$\|f_n\| = \sup_{\substack{x\in E \\ \|x\|\leq 1}} < f_n, x >$$

esiste $x_n \in E$ tale che

$$\|x\| = 1 \text{ e } < f_n, x_n >\geq \frac{1}{2}\|fn\|$$

Sia L_0 lo spazio generato su $\mathcal{Q} = \{x = (x', x_N) \in \mathbf{R}^{N-1} \times \mathbf{R} : |x'| < 1, |x_N| < 1\}$ generato dalle $(x_n)_{n\geq 1}$, cioé L_0 é l'insieme delle combinazioni lineari **finite** a coefficienti in $\mathcal{Q}$ di elementi di $(x_n)_{n\geq 1}$. Si noti che L_0 é **numerabile**, infatti per ogni n, Λ_n = spazio vettoriale su $\mathcal{Q}$ da $[x_1, ..., x_n]$ é in corrispondenza con un sottoinsieme di $\mathcal{Q}^n$ e

$$L_0 = \bigcup_{n\geq 1} \Lambda_n$$

Sia L lo spazio vettoriale su $\mathbf{R}$. L_0 é denso in L. Sia $f \in E' | < f, x >= 0$ $\forall x \in L$. Dato $\varepsilon > 0, \exists n$ tale che $\|f - f_n\| < \varepsilon$ si ha

$$\frac{1}{2}\|f_n\| \leq < f_n, x_n >=< f_n - f, x_n > + < f, x >\leq \varepsilon$$

Dunque $\|f\| \leq \|f - f_n\| + \|f_n\| \leq 3\varepsilon \Rightarrow f = 0$

7.2 Corollario (Banach Separabile e Riflessivo $\Leftrightarrow$ Duale Separabile e Riflessivo)

Sia E uno spazio di Banach. Allora E riflessivo e separabile $\Leftrightarrow$ E' riflessivo e separabile

7.3 Definizione

Uno spazio topologico (X, m) é metrizzabile se esiste su X una metrica d tale che la topologia indotta da d é proprio m

7.4 Teorema (Metrizzabilità di $B_{E'}$)

Sia E uno spazio di Banach. E é separabile $\Leftrightarrow$ B'_E é metrizzabile per la topologia $\sigma(E', E)$.

7.5 Corollario sulle Sottosuccessioni Debolmente Convergenti in uno Spazio Separabile

Sia E uno spazio di Banach separabile e sia (f_n) una successione limitata in E'. Allora esiste una sottosuccessione (f_{n_k}) che converge per la topologia $\sigma(E', E)$

7.5.1 Dimostrazione

Si supponga, senza perdita di generalità che $\|f_n\| \leq 1$ $\forall n$. Per il Teorema sulla Metrizzabilità di $B_{E'}$ e il Teorema di Banach-Alaoglu-Bourbaki l'insieme $B_{E'}$ é compatto e metrizzabile per la topologia $\sigma(E', E)$. Da qui la conclusione.

7.6 Teorema sulle Sottosuccessioni Debolmente Convergenti in uno Spazio Riflessivo

Sia E uno spazio di Banach riflessivo e sia x_n una successione limitata in E. Allora esiste una sottosuccessione (x_{nk}) che converge per la topologia $\sigma(E, E')$

7.6.1 Dimostrazione

Sia M_0 lo spazio vettoriale generato da (x_n) e sia $M = \overline{M_0}$. M è separabile, per il Teorema sulla separabilità di E'. M inoltre é riflessivo per la Proposizione SVR.Risulta quindi che B_M é un insieme metrizzabile e compatto per la topologia $\sigma(M, M')$. Infatti M é separabile per il Corollario BRSDRS e allora $B_{M''}(= B_M)$ é metrizzabile per $\sigma(M'', M')(= \sigma(M, M'))$ per il Teorema sulla metrizzabilità di $B_{E'}$. Si può quindi estrarre una sottosuccessione (x_{n_k}) che converge per la topologia $\sigma(M, M')$. Quindi per restrizione a M delle forme lineari continue su E si deduce che (x_{nk}) converge anche per la topologia $\sigma(E, E')$

7.7 Teorema (Eberlein-Smulian)

Sia E uno spazio di Banach tale che ogni successione limitata (x_n) abbia un'estratta (x_{n_k}) convergente per la topologia $\sigma(E, E')$. Allora E é riflessivo