AM310-2012 : APPELLO A

TEMA 1. Sia Σ una σ algebra di sottoinsiemi di X.

1.1. Dare la definizione di funzione Σ-misurabile ed indicare le proprietá della classe delle funzioni Σ-misurabili. Provare la formula per $f \geq 0$, funzione Σ-misurabile:

$$\exists E_j \in \Sigma : \qquad f(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j} \chi_{E_j}(x) \qquad \forall x \in X$$

1.2. Sia μ misura su X, Σ_μ la classe dei misurabili. Dare la definizione di funzione μ-sommabile e mostrare che, se $f \geq 0$ é μ-sommabile, allora

$$\nu(E) := \int\limits_X f \chi_E d\mu, \qquad E \in \Sigma_\mu$$

é misura su X, assolutamente continua rispetto a μ

1.3. Sia $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}, s : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$, $s(x,y) = x - y$. Provare, o disprovare, le affermazioni:

(l) Se f é borel misurabile allora $f \circ s$ é borel misurabile
(ll) Se f é Lebesgue misurabile allora $f \circ s$ é Lebesgue misurabile.

TEMA 2. Sia μ misura su X.

2.1. Enunciare la diseguaglianza di Hanner e dedurre che, se $p > 1$, $C \subset L^p$ chiuso e convesso, allora

$$\forall h \in L^p, \quad \exists h_C \in C : \quad \|h - h_C\|_p \leq \|h - g\|_p \quad \forall g \in C$$

2.2. Mostrare come 2.1. permette di dimostrare che (assumendo L^p separabile) ogni successione limitata in L^p ammetta una sottosuccessione debolmente convergente.

2.3. Sia $p \geq 2$. Provare che :

$$\|f_n\|, \|g_n\| \leq 1, \quad \|\frac{f_n + g_n}{2}\|_p \to_n 1 \quad \Rightarrow \quad \|f_n - g_n\|_p \to_n 0$$

e dedurre che

$$f_n \rightharpoonup_n f, \quad \|f_n\|_p \to \|f\|_p \quad \Rightarrow \quad \|f_n - f\|_p \to 0$$

TEMA 3.

3.1. Enunciare e dimostrare il Teorema di Riesz sulla rappresentazione di funzionali lineari positivi su $C_0(\mathbf{R}^N)$.

3.2. Siano μ_n misure di Radon in $\mathbf{R}^N$. Provare che

$$\sup_n \mu_n(B_R) < +\infty \ \forall R \quad \Rightarrow \quad \exists n_k, \mu : \quad \mu_{n_k} \rightharpoonup_k \mu$$

3.3. Data $\quad f \in C_0^\infty(\mathbf{R}^N), \quad f \geq 0, \quad \int\limits_{\mathbf{R}^N} f = 1$ e $p > 1$, siano

$$f_n(x) := n^{\frac{N}{p}} f(nx), \quad \mu_n(E) := \int\limits_E f_n(x)dx$$

(i) Stabilire per quali $q \geq 1$ la successione f_n converge in $L^q(\mathbf{R}^N)$
(ii) Stabilire per quali $q \geq 1$ la successione f_n converge debolmente ma non fortemente in L^q.
(iii) Stabilire per quali p la successione μ_n converge debolmente.

TEMA 4. Sia μ misura su X, $\mathcal{L}^p = \{f : f$ é μ-misurabile e $\int_X |f|^p d\mu < \infty\}$.

4.1. Siano $1 < p, q$. Siano f, g μ-misurabili, $\|f\|_p := (\int_X |f|^p d\mu)^{\frac{1}{p}}$. Provare che
(a) $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \quad \Rightarrow \quad \int_X |f\, g| \ \leq \ \|f\|_p \, \|g\|_q$
(b) $\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$
(c) $p \leq r \leq q, \ f \in \mathcal{L}^p \cap \mathcal{L}^q \ \Rightarrow \ f \in \mathcal{L}^r$ ed $\exists \theta \in [0,1] : \quad \|f\|_r \leq \|f\|_p^\theta \, \|f\|_q^{1-\theta}$

4.2 Sia f $\mu-$misurabile e $\|f\|_\infty := \inf\{c \geq 0 : \ |f(x)| \leq c \ $ q.o. $\ x\}$. Provare che
(d) $\quad \sup_{p \geq 1} \|f\|_p < +\infty \quad \Rightarrow \quad \|f\|_\infty < \infty$
(e) $\quad \|f\|_p < \infty$ per $p \in \{1, \infty\} \quad \Rightarrow \quad \|f\|_p < \infty \quad \forall p > 1$ e $\|f\|_p \to_{p \to +\infty} \|f\|_\infty$

4.3. Siano $f_n : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ boreliane e tali che $\sup_n \int_{\mathbf{R}^n} |f_n|^2 < \infty$. Provare che

$$f_n \to f \quad q.o., \quad \int |f_n|^2 \to \int |f|^2 \quad \Rightarrow \quad \|f_n - f\|_2 \to 0$$

TEMA 5.

5.1. Enunciare e dimostrare la diseguaglianza di Young.

5.2. Enunciare la diseguaglianza di Hardy-Littlewood-Sobolev e derivare diseguaglianza di Sobolev e Teorema di Rellich.