Operatori Compatti
Decomposizione spettrale degli operatori autoaggiunti compatti
Autofunzioni e Decomposizione Spettrale

Maria Eleuteri Andrea Gullotto Alessia Selvaggini

1 Operatori Compatti Decomposizione spettrale degli operatori autoaggiunti compatti

1.1 Definizioni. Proprietà elementari. Aggiunto

Siano E ed F due spazi di Banach e sia B_E (risp. B_F) la palla unitaria in E (risp. in F)

Definizione 1.1. *Si dice che un operatore $T \in \mathcal{L}(E,F)$ è* ***compatto*** *se $T(B_E)$ è relativamente compatto per la topologia forte (indotta dalla norma). Indichiamo con $\mathcal{K}(E,F)$ l'insieme degli operatori compatti e poniamo $\mathcal{K}(E) := \mathcal{K}(E,E)$.*

Teorema 1.2. *L'insieme $\mathcal{K}(E,F)$ è un sottospazio vettoriale chiuso di $\mathcal{L}(E,F)$ (per la norma $|| \ \ ||_{\mathcal{L}(E,F)}$)*

Dimostrazione. Evidentemente la somma di due operatori compatti è un operatore compatto.
Supponendo che $(T_n) \subset \mathcal{K}(E,F)$, $T \in \mathcal{L}(E,F)$ e $||T_n - T||_{\mathcal{L}(E,F)} \to 0$, dimostriamo che $T \in \mathcal{K}(E,F)$.
Poiché F è completo, basta verificare che, $\forall \epsilon > 0$, $T(B_E)$ può essere ricoperto da un numero finito di sfere $B(f_i, \epsilon)$ in F ($f_i \in F$).
Fissiamo n tale che $||T_n - T||_{\mathcal{L}(E,F)} < \frac{\epsilon}{2}$. Poiché $T_n(B_E)$ è relativamente compatto, $T_n(B_E) \subset \bigcup_{i \in I} B(f_i, \frac{\epsilon}{2})$ con I finito. Dunque $T(B_E) \subset \bigcup_{i \in I} B(f_i, \epsilon)$ $\square$

Definizione 1.3. *Diciamo che un operatore $T \in \mathcal{L}(E,F)$ è di* ***rango finito*** *se $dim R(T) < \infty$.*

Osservazione 1.4. *Evidentemente un operatore continuo di rango finito è compatto.*

Corollario 1.4.1. *Sia (T_n) una successione di operatori continui di rango finito di E in F e sia $T \in \mathcal{L}(E,F)$ tale che $||T_n - T||_{\mathcal{L}(E,F)} \to 0$.
Allora $T \in \mathcal{K}(E,F)$.*

Osservazione 1.5. *Il ben noto* ***problema dell'approssimazione*** *concerne il reciproco del corollario 1.20.1.
Dato un operatore compatto, esiste una successione (T_n) di operatori di rango finito tale che $||T_n - T||_{\mathcal{L}(E,F)} \to 0$?
In generale la risposta è negativa anche per certi sottospazi chiusi di l^p ($1 < p < \infty$, $p \neq 2$).
Tuttavia in molti casi la risposta è affermativa; ad esempio, se F è uno spazio di Hilbert.*

Proposizione 1.6. *Siano E, F e G tre spazi di Banach. Se $T \in \mathcal{L}(E,F)$ e $S \in \mathcal{K}(F,G)$ (risp. $T \in \mathcal{K}(E,F)$ e $S \in \mathcal{L}(F,G)$) allora $S \circ T \in \mathcal{K}(E,G)$*

Teorema 1.7 (Schauder)**.** *Se $T \in \mathcal{K}(E,F)$, allora $T^* \in \mathcal{K}(F',E')$. E viceversa.*

Dimostrazione. Verifichiamo che $T^*(B_{F'})$ è relativamente compatto in E'. Sia (v_n) una successione di $B_{F'}$; dimostriamo che si può estrarre una sottosuccessione n_k tale che $T^*(v_{n_k})$ converge.

Sia $K = \overline{T(B_E)}$ (metrico compatto) e sia $\mathcal{K} \subset C(K)$ definito da

$$\mathcal{K} = \{\varphi_n : x \in \mathcal{K} \to < v_n, x >; n = 1, 2, \dots\}$$

Le ipotesi del teorema di Ascoli sono soddisfatte e dunque possiamo estrarre una sottosuccessione φ_{n_k} che converge, in $C(K)$, verso una funzione $\varphi \in C(K)$. In particolare

$$\sup_{u \in B_E} | < v_{n_k}, Tu > -\varphi(Tu)| \underset{k\to\infty}{\to} 0$$

Dunque

$$\sup_{u \in B_E} | < v_{n_k}, Tu > - < v_{n_l}, Tu > | \underset{k,l\to\infty}{\to} 0$$

cioè $||T^* v_{n_k} - T^* v_{n_l}||_{E'} \to_{k,l\to\infty} 0$. Di conseguenza $T^* v_{n_k}$ converge in E'.
Reciprocamente, supponiamo che $T^* \in \mathcal{K}(F', E')$. Per quanto precede si ha che $T^{**} \in \mathcal{K}(E'', F'')$ e in particolare $T^{**}(B_E)$ è relativamente compatto in F''.
Ora, $T(B_E) = T^{**}(B_E)$ ed F è chiuso in F''.
Di conseguenza $T(B_E)$ è relativamente compatto in F. □

1.2 La teoria di Riesz-Fredholm

Cominciamo con alcuni risultati preliminari.

Lemma 1.8 (Lemma di Riesz)**.** *Sia E uno spazio vettoriale normato e sia $M \subset E$ un sottospazio chiuso tale che $M \neq E$. Allora*

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists u \in E \text{ tale che } ||u|| = 1 \text{ e } dist(u, M) \geq 1 - \epsilon$$

Dimostrazione. Sia $v \in E$ con $v \notin M$. Poiché M è chiuso, allora $d = dist(u, M) > 0$. Scegliamo $m_0 \in M$ tale che

$$d \leq ||v - m_0|| \leq \frac{d}{1 - \epsilon}$$

Allora

$$u = \frac{v - m_0}{||v - m_0||}$$

soddisfa alla condizione. Infatti se $m \in M$, si ha

$$||u - m|| = ||\frac{v - m_0}{||v - m_0||} - m|| \geq 1 - \epsilon$$

in quanto

$$m_0 + ||v - m_0||m \in M$$

□

Teorema 1.9 (Riesz)**.** *Sia E uno spazio vettoriale normato tale che B_E sia compatto. Allora E ha dimensione finita.*

Dimostrazione. Ragioniamo per assurdo. Se E ha dimensione infinita, esiste una successione (E_n) di sottospazi di dimensione finita tali che $E_{n-1} \underset{\neq}{\subset} E_n$. Grazie al lemma 1.8 si può costruire una successione (u_n) con $u_n \in E_n$, $||u_n|| = 1$ e $dist(u_n, E_{n-1}) \geq \frac{1}{2}$. In particolare $||u_n - u_m|| \geq \frac{1}{2}$ per $m < n$. Dunque la successione (u_n) non ammette alcuna sottosuccessione convergente e ciò è in contrasto con l'ipotesi "B_E è compatto". □

Teorema 1.10 (Alternativa di Fredholm)**.** *Sia $T \in \mathcal{K}(E)$. Allora*

a) $N(I - T)$ è di dimensione finita

b) $R(I - T)$ è chiuso, e più precisamente

$$R(I - T) = N(I - T^*)^{\perp}$$

c) $N(I - T) = \{0\} \iff R(I - T) = E$

d) $dimN(I - T) = dimN(I - T^*)$

Osservazione 1.11. *L'Alternativa di Fredholm concerne la risoluzione dell'equazione $u - Tu = f$. Essa esprima la circostanza che* ***o*** *per ogni $f \in E$ l'equazione $u - Tu = f$ ammette un'unica soluzione* ***oppure*** *l'equazione omogenea $u - Tu = 0$ ammette n soluzioni linearmente indipendenti e, in tal caso, l'equazione non omogenea $u - Tu = f$ è risolubile se solo se f verifica n* ***condizioni di ortogonalità*** *(cioè $f \in N(I - T^*)^{\perp}$).*

Osservazione 1.12. *La proprietà c) è familiare in dimensione finita. Se $dimE < \infty$, un operatore lineare di E in sé è iniettivo se e solo se è suriettivo. Al contrario,* ***in dimensione infinita un operatore limitato può essere iniettivo senza essere suriettivo e viceversa****: Ad esempio la traslazione a destra (risp. a sinistra) in l^2.*
La conclusione c) esprime dunque una proprietà notevole degli operatori della forma $I - T$ con $T \in \mathcal{K}(E)$.

Dimostrazione Teorema 1.10. a) Sia $E_1 = N(I - T)$. Allora $B_E \subset T(B_E)$ e dunque B_{E_1} è compatto. Grazie al teorema 1.9, E_1 ha dimensione finita.

b) Sia $f_n = u_n - Tu_n \to f$. Si deve dimostrare che $f \in R(I - T)$. Poniamo $d_n = dist(u_n, N(I - T))$. Poiché $N(I - T)$ ha dimensione finita, esiste $v_n \in N(I - T)$ tale che $d_n = ||u_n - v_n||$. Si ha

$$f_n = (u_n - v_n) - T(u_n - v_n) \tag{1}$$

Verifichiamo che $||u_n - v_n||$ resta limitata. Ragioniamo per assurdo e supponiamo che esista una sottosuccessione n_k tale che $||u_{n_k} - v_{n_k}|| \to \infty$. Ponendo $w_n = \frac{u_n - v_n}{||u_n - v_n||}$ si avrebbe, grazie alle (1) $w_{n_k} - Tw_{n_k} \to 0$. Estraendo una sottosuccessione (ancora indicata con (w_{n_k}), per semplicità) possiamo supporre che $Tw_{n_k} \to z$. Dunque $w_{n_k} \to z$ e $z \in N(I - T)$. D'altra parte

$$dist(w_{n_k}, N(I - T)) = \frac{dist(u_{n_k}, N(I - T))}{||u_{n_k} - v_{n_k}||} = 1$$

giacché $v_n \in N(I-T)$. Al limite si ottiene $dist(z, N(I-T)) = 1$ e ció é assurdo. Di conseguenza $||u_n - v_n||$ é limitata e, poiché T é compatto, si puó estrarre una sottosuccessione tale che $T(u_{n_k} - v_{n_k}) \to l$.
Da 1 segue che $u_{n_k} - v_{n_k} \to f + l$; ponendo $g = f + l$ si ha che $g - Tg = f$, cioé $f \in R(I-T)$. Abbiamo cosí dimostrato che l'operatore $I - T$ ha immagine chiusa. Possiamo perció applicare un teorema che non dimostreremo ma che ci permette di affermare che

$$R(I-T) = N(I-T^*)^{\perp}$$

$$R(I-T^*) = N(I-T)^{\perp}$$

c) Dimostriamo ora l'implicazione $\Rightarrow$. Ragioniamo per assurdo e supponiamo che

$$E_1 := R(I-T) \neq E$$

s E_1 è uno spazio di Banach e $T(E_1) \subset E_1$. Dunque $T_{|E_1} \in \mathcal{K}(E_1)$ e $E_2 = (I-T)(E_1)$ è un sottospazio chiuso di E_1. Inoltre $E_2 \neq E_1$ (giacché $(I-T)$ è iniettivo). Ponendo $E_n := (I-T)^n(E)$ otteniamo così una successione strettamente decrescente di sottospazi chiusi. In base al lemma di Riesz, esiste una successione (u_n) tale che $u_n \in E_n$, $||u_n|| = 1$ e $dist(E_{n+1}, u_n) \geq \frac{1}{2}$. Si ha

$$Tu_n - Tu_m = -(u_n - Tu_n) + (u_m - Tu_m) + (u_n - u_m)$$

Osserviamo che, se $n > m$, $E_{n+1} \subset E_n \subset E_{m+1} \subset E_m$ e, di conseguenza

$$-(u_n - Tu_n) + (u_m - Tu_m) + u_n \in E_{m+1}$$

Pertanto $||Tu_n - Tu_m|| \geq \frac{1}{2}$ e ciò è assurdo poiché T è compatto.
Dunque $R(I-T) = E$.
Viceversa, Supponiamo che $R(I-T) = E$. Allora $N(I-T^*) = R(I-T)^{\perp} = \{0\}$. Poiché $T^* \in \mathcal{K}(E')$, possiamo applicare il procedimento precedente a T^* e concludere che $R(I-T^*) = E'$. Ora, $N(I-T) = R(I-T^*)^{\perp} = \{0\}$.

d) Sia $d = \dim N(I-T)$, $d^* = \dim N(I-T^*)$. Dimostriamo che $d^* \leq d$. Supponiamo per assurdo che $d < d^*$. Poiché $N(I-T)$ ha dimensione finita, esso ammette un supplementare topologico in E; di conseguenza esiste un proiettore continuo P di E su $N(I-T)$. D'altra parte $R(I-T) = N(I-T^*)^{\perp}$ è di codimensione finita d^* e allora $R(I-T)$ ammette (in E) un supplementare topologico, indicato con F, di dimensione d^*. Poiché $d < d^*$, esiste un'applicazione lineare $\Lambda : N(I-T) \to F$ che è **iniettiva** e **non suriettiva**. Posto $S = T + (\Lambda \circ P)$; allora $S \in \mathcal{K}(E)$ in quanto $\Lambda \circ P$ è di rango finito.
Dimostriamo che $N(I-S) = \{0\}$; infatti se

$$0 = u - Su = (u - Tu) - (\Lambda \circ Pu)$$

allora

$$u - Tu = 0 \quad e \quad \Lambda \circ Pu = 0$$

cioè $u \in N(I-T)$ e $\Lambda u = 0$; dunque $u = 0$.
Applicando il punto c) all'operatore S, si vede che $R(I-S) = E$. Ciò

è assurdo poiché esiste $f \in F$, $f \notin R(\Lambda)$; l'equazione $u - Su = f$ non ammette soluzioni.
Di conseguenza si è dimostrato che $d^* \leq d$. Applicando tale risultato a T^*, si vede che

$$\dim N(I - T^{**}) \leq \dim N(I - T^*) \leq \dim N(I - T)$$

Ora, $N(I - T^{**}) \supset N(I - T)$ e ciò permette di concludere che $d = d^*$

□

1.3 Spettro d'un operatore compatto

Definizioni 1.13. *Sia $T \in \mathcal{L}(E)$.*
*L'**insieme risolvente** è*

$$\rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{R}; (T - \lambda I) \textit{è biiettivo di } E \textit{ su } E\}$$

*Lo **spettro** $\sigma(T)$ è il complementare dell'insieme risolvente, $\sigma(T) = \mathbb{R} \backslash \rho(T)$. Si dice che λ è un **autovalore** e si scrive $\lambda \in \mathbf{VP}(T)$ se*

$$N(T - \lambda I) \neq 0$$

*$N(T - \lambda I)$ è l'**autospazio** associato a λ. E' importante ricordare che se $\lambda \in \rho(T)$, allora $(T - \lambda I)^{-1}\mathcal{L}(E)$*

Osservazione 1.14. *Evidentemente risulta $VP(T) \subset \sigma(T)$. In generale l'inclusione è stretta: può esistere λ tale che*

$$N(T - \lambda I) = \{0\} \quad e \quad R(T - \lambda I) \neq E$$

(un tale λ appartiene allo spettro, ma non è un autovalore). Ad esempio poniamo, in $E = l^2$, $Tu = (0, u_1, u_2, \dots)$ ove $u = (u_1, u_2, \dots)$ (cioè T è la traslazione verso destra). Allora $0 \in \sigma(T)$ e $0 \notin VP(T)$.

Proposizione 1.15. *Lo spettro $\sigma(T)$ è un insieme compatto e*

$$\sigma(T) \subset [-||T||, ||T||]$$

Dimostrazione. Sia $\lambda \in \mathbb{R}$ con $|\lambda| > ||T||$; dimostriamo che $T - \lambda I$ è biiettiva, da cui seguirà che $\sigma(T) \subset [-||T||, ||T||]$. Data $f \in E$, l'equazione $Tu - \lambda u = f$ ammette un'unica soluzione, in quanto essa si scrive $u = \frac{1}{\lambda}(Tu - f)$ e si può applicare il teorema del punto unito di Banach. Dimostriamo ora che $\rho(T)$ è aperto. Sia $\lambda_0 \in \rho(T)$. Dato $\lambda \in \mathbb{R}$ (prossimo a λ_0) e data $f \in E$, cerchiamo di risolvere

$$Tu - \lambda u = f \tag{2}$$

Ora, (2) può essere riscritta come $Tu - \lambda_0 u = f + (\lambda - \lambda_0)u$, cioè

$$u = (T - \lambda_0 I)^{-1}[f + (\lambda - \lambda_0)u] \tag{3}$$

Applicando nuovamente il teorema del punto unito di Banach, si vede che (3) possiede un'unica soluzione se

$$|\lambda - \lambda_0| \; ||(T - \lambda_0 I)^{-1}|| < 1$$

□

Teorema 1.16. *Sia $T \in \mathcal{K}(E)$ con $dim E = \infty$*
Allora si ha:

a) $0 \in \sigma(T)$

b) $\sigma(T) \backslash \{0\} = VP(T) \backslash \{0\}$

c) ***una delle situazioni seguenti:***

- *o* $\sigma(T) = \{0\}$,
- *o* $\sigma(T) \backslash \{0\}$ ***è finito,***
- *o* $\sigma(T) \backslash \{0\}$ ***è una successione che tende a zero.***

Dimostrazione. a) Supponiamo che $0 \notin \sigma(T)$. Allora T è biiettiva e $I = T \circ T^{-1}$ è compatta. Dunque B_E è compatta e $\dim E < \infty$ (vedi teorema 1.9)

b) Sia $\lambda \in \sigma(T)$, $\lambda \neq 0$. Verifichiamo che $\lambda \in VP(T)$. Supponiamo per assurdo che $N(T - \lambda I) = \{0\}$. Allora grazie al teorema 1.10, punto c), sappiamo che $R(T - \lambda I) = E$ e dunque $\lambda \in \rho(T)$ e ciò è assurdo.

□

Per il seguito della dimostrazione avremo bisogno del

Lemma 1.17. *Sia $(\lambda_n)_{n \geq 1}$ una successione di numeri reali tutti distinti tali che*

$$\lambda_n \to \lambda$$

e

$$\lambda_n \in \sigma(T) \backslash \{0\} \qquad \forall n$$

Allora $\lambda = 0$.
In altre parole, ***tutti i punti di*** $\sigma(T) \backslash \{0\}$ ***sono isolati.***

Dimostrazione. Sappiamo che $\lambda_n \in VP(T)$; sia $e_n \neq 0$ tale che $(T - \lambda_n I)e_n = 0$. Sia E_n lo spazio vettoriale generato da $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$. Dimostriamo che $E_n \underset{\neq}{\subset} E_{n+1}$ per ogni n. Basta verificare che, per ogni n, i vettori $e_1, e_2, \ldots, e_n$ sono linearmente indipendenti. Ragioniamo per ricorrenza su n. Ammettiamo il risultato all'ordine n e supponiamo che $e_{n+1} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$. Allora:

$$Te_{n+1} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_i e_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_{n+1} e_i$$

Di conseguenza $\alpha_i(\lambda_i - \lambda_{n+1}) = 0$ per ogni $i = 1, 2, \ldots n$ e dunque $\alpha_i = 0$ per ogni $i = 1, 2, \ldots, n$, e ciò è assurdo. Dunque $E_n \underset{\neq}{\subset} E_{n+1}$ per ogni n.

D'altra parte è evidente che $(T - \lambda_n)E_n \subset E_{n-1}$. Applicando il lemma di Riesz si può costruire una successione $(u_n)_{n \geq 1}$ tale che $u_n \in E_n$, $||u_n|| = 1$ e $dist(u_n, E_{n-1}) \geq \frac{1}{2}$ per $n \geq 2$. Siano $2 \leq m < n$ in modo che

$$E_{m-1} \subset E_m \subset E_{n-1} \subset E_n$$

Si ha

$$||\frac{Tu_n}{\lambda_n}-\frac{Tu_m}{\lambda_m}|| = ||\frac{(Tu_n-\lambda_n u_n)}{\lambda_n}-\frac{Tu_m-\lambda_m u_m}{\lambda_m}+u_n-u_m|| \geq dist(u_n, E_{n-1}) \geq \frac{1}{2}$$

Se $\lambda_n \to \lambda \neq 0$, si perviene ad una contraddizione, in quanto (Tu_n) ammette una sottosuccessione convergente. □

Dimostrazione del Teorema 1.16c. Per ogni intero $n \geq 1$ l'insieme

$$\sigma(T) \cap \{\lambda \in \mathbb{R}; |\lambda| \geq \frac{1}{n}\}$$

è **vuoto** o **finito** (se contenesse infiniti punti distinti, esisterebbe un punto di accumulazione, poiché $\sigma(T)$ è compatto, e si avrebbe una contraddizione con il lemma 1.17). Se $\sigma(T)\backslash\{0\}$ contiene un'infinità di punti distinti, li si può dunque ordinare in una successione che tende a zero. □

Osservazione 1.18. *Data una successione (α_n) che tende verso 0, possiamo costruire un operatore compatto T tale che $\sigma(T) = (\alpha_n) \cup \{0\}$. E' sufficiente considerare $E = l^2$ l'operatore $T : u = (u_n) \to Tu = (\alpha_n u_n)$. Notiamo che T è compatto in quanto esiste una successione (T_n) di operatori di rango finito tali che $||T_n - T|| \to 0$. In questo esempio si vede anche che 0 può appartenere o non a $VP(T)$; inoltre, se $0 \in VP(T)$, può accadere che l'autospazio associato, cioè $N(T)$, sia di dimensione infinita.*

1.4 Decomposizione spettrale degli operatori autoaggiunti compatti

Supponiamo nel seguito che $E = H$ sia uno spazio di Hilbert e che $T \in \mathcal{L}(H)$. Identificando H' e H, possiamo assumere che $T^* \in \mathcal{L}(H)$.

Definizione 1.19. *Diciamo che un operatore $T \in \mathcal{L}(H)$ è **autoaggiunto** se $T^* = T$, cioè se*

$$(Tu, v) = (u, Tv) \qquad \forall u, v \in H$$

Proposizione 1.20. *Sia $T \in \mathcal{L}(H)$ un operatore autoaggiunto. Poniamo*

$$m = \inf_{\substack{u \in H \\ ||u||=1}} (Tu, u) \quad e \quad M = \sup_{\substack{u \in H \\ ||u||=1}} (Tu, u)$$

Allora $\sigma(T) \subset [m, M]$, $m \in \sigma(T)$ e $M \in \sigma(T)$.

Dimostrazione. Sia $\lambda > M$; verifichiamo che $\lambda \in \rho(T)$. Si ha

$$(Tu, u) \leq M|u|^2$$

e di conseguenza

$$(\lambda u - Tu, u) \geq (\lambda - M)|u|^2 = \alpha|u|^2 \quad \forall u \in H, \text{ con } \alpha > 0$$

Applicando il teorema di Lax-Milgram si vede che $\lambda I - T$ è biiettivo.
Verifichiamo che $M \in \sigma(T)$. La forma $a(u, v) = (Mu - Tu, v)$ è bilineare, simmetrica e

$$a(v, v) \geq 0 \quad \forall v \in H$$

Applicando la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz alla forma $a(u, v)$ si ha

$$|(Mu - Tu, v)| \leq (Mu - Tu, u)^{\frac{1}{2}} (Mv - Tv, v)^{\frac{1}{2}} \quad \forall u, v \in H$$

Da cui in particolare risulta che

$$|Mu - Tu| \leq C(Mu - Tu, u)^{\frac{1}{2}} \qquad \forall u \in H \tag{4}$$

Sia (u_n) una successione tale che $|u_n| = 1$ e $(Tu_n, u_n) \to M$. Grazie a (4) si vede che $|Mu_n - Tu_n| \to 0$ e dunque $M \in \sigma(T)$ (in quanto, se $M \in \rho(T)$, allora $u_n = (MI - T)^{-1}(MI - T) \to 0$).
Le proprietà di m si ottengono sostituendo T con $-T$. □

Corollario 1.20.1. *Sia $T \in \mathcal{L}(H)$ un operatore autoaggiunto tale che $\sigma(T) = \{0\}$. Allora $T = 0$.*

Dimostrazione. In base alla proposizione 1.20 sappiamo che

$$(Tu, u) = 0 \quad \forall u \in H$$

Ne segue che

$$2(Tu, v) = (T(u + v), u + v) - (Tu, u) - (Tv, v) \quad \forall u, v \in H$$

Dunque $T = 0$. □

Il risultato che segue è fondamentale; esso mette in evidenza che un operatore autoaggiunto compatto è **diagonalizzabile** in una base scelta opportunamente.

Teorema 1.21. *Supponiamo che H sia separabile. Sia T un operatore autoaggiunto compatto. Allora H ammette una base Hilbertiana costituita di autovettori di T.*

Dimostrazione. Sia (λ_n) la successione degli autovalori distinti di T, escluso 0; poniamo $\lambda_0 = 0$.
Poniamo $E_0 : N(T)$ e $E_n := N(T - \lambda_n I)$; ricordiamo che

$$0 \leq \dim E_0 \leq \infty \text{ e che } 0 < \dim E_n < \infty$$

Verifichiamo ora che H è somma Hilbertiana degli $(E_n)_{n \geq 0}$:

(i) Gli $(E_n)_{n \geq 0}$ sono a due a due ortogonali. Infatti se $u \in E_m$ e $v \in E_n$ con $m \neq n$, allora
$$Tu = \lambda_m u \quad Tv = \lambda_n v$$
e
$$(Tu, v) = \lambda_m(u, v) = (u, Tv) = \lambda_n(u, v)$$
Dunque
$$(u, v) = 0$$

(ii) Sia F lo spazio vettoriale generato dagli $(E_n)_{n \geq 0}$. Verifichiamo che F è denso in H.
Evidentemente si ha $T(F) \subset F$. Ne segue che $T(F^\perp) \subset F^\perp$; infatti, se $u \in F^\perp$ e $v \in F$, allora $(Tu, v) = (u, Tv) = 0$. L'operatore $T_0 =$

$T_{|F^\perp}$ è autoaggiunto compatto. D'altra parte $\sigma(T_0) = \{0\}$; infatti se $\lambda \in \sigma(T_0)\backslash\{0\}$, allora $\lambda \in VP(T_0)$, e dunque esiste $u \in F^\perp$, $u \neq 0$ tale che $T_0 u = \lambda u$. Di conseguenza λ è uno degli autovalori λ_n di T e $u \in F^\perp \cap E_n$. Dunque $u = 0$, il che è assurdo.
Dal corollario 1.20.1 risulta che $T_0 = 0$; pertanto

$$F^\perp \subset N(T) \subset F \qquad \text{e} \qquad F^\perp = \{0\}$$

Dunque F è denso in H.
Infine scegliamo in ciascun E_n una base Hilbertiana. L'unione di queste basi è una base Hilbertiana di H costituita di autovettori di T.

□

Osservazione 1.22. *Sia T un operatore autoaggiunto compatto.*
Da quanto precede si può esprimere ogni $u \in H$ sotto la forma

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n \qquad \textit{con} \qquad u_n \in E_n$$

in modo che $Tu = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n u_n$. Poniamo

$$T_k u = \sum_{n=1}^{k} \lambda_n u_n$$

Evidentemente T_k è un operatore di rango finito e

$$||T_k - T|| \leq \sup_{n \geq k+1} |\lambda_n| \to 0 \qquad \textit{per } k \to \infty$$

Ritroviamo così il fatto che T è limite di una successione (T_k) di operatori di rango finito. Ricordiamo che in uno spazio di Hilbert ***ogni*** *operatore compatto,* ***non necessariamente autoaggiunto****, è limite d'una successione di operatori di rango finito (vedi osservazione 1.5).*

2 Autofunzioni e Decomposizione Spettrale

Il risultato fondamentale di questa sezione è il seguente

Teorema 2.1. *Sia Ω aperto limitato.*
Esiste una base Hilbertiana $(e_n)_{n\geq 1}$ di $L^2(\Omega)$ ed esiste una successione $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ di reali con $\lambda_n > 0$ e $\lambda_n \to \infty$ tali che

$$e_n \in {H_0}^1(\Omega) \cap C^\infty(\Omega) \tag{5}$$

$$-\Delta e_n = \lambda_n e_n \;\; \textit{su} \;\; \Omega \tag{6}$$

Si dice che i (λ_n) sono gli autovalori di $-\Delta$ (con condizione di Dirichlet) e che le (e_n) sono le autofunzioni associate.

Per la dimostrazione abbiamo bisogno di alcune strutture da definire ossia gli **Spazi di Sobolev**. Le introduciamo con il seguente:

Esempio 2.2. *Consideriamo il seguente problema. Data una funzione* $f \in C([a,b])$*, determinare una funzione* $u(x)$ *verificante*

$$\begin{cases} -u'' + u = f & su\ [a,b] \\ u(a) = u(b) = 0 \end{cases} \tag{7}$$

Una soluzione ***classica****, o soluzione* ***forte****, del problema (7) è una funzione di classe* C^2 *su* $[a,b]$ *verificante (7) in maniera usuale.*
Moltiplichiamo ora (7) per $\varphi \in C^1([a,b])$ *e integriamo per parti; si ottiene*

$$\int_a^b u'\varphi' + \int_a^b u\varphi = \int_a^b f\varphi \quad \forall\varphi \in C^1([a,b]),\ \varphi(a) = \varphi(b) = 0 \tag{8}$$

Osserviamo che la (8) ha significato se $u \in C^1([a,b])$ *(contrariamente a (7) che presuppone u derivabile 2 volte).*
Diciamo, provvisoriamente, che una funzione u di classe C^1 *che verifica (8) è una soluzione* ***debole*** *di (7).*

I seguenti passi descrivono , a grandi linee, il **metodo variazionale** nella teoria delle equazioni a derivate parziali.

Passo A Si precisa la nozione di soluzione debole; ciò fa intervenire gli **Spazi di Sobolev** che sono uno **strumento basilare**.

Passo B Si stabilisce l'**esistenza** e l'**unicità** di una **soluzione debole**, mediante il metodo variazionale, attraverso il teorema di Lax-Milgram.

Passo C Si dimostra che la soluzione è di classe C^2 (per esempio): questo è un risultato di regolarità.

Passo D Ritorno alle soluzioni classiche. Si dimostra che una soluzione debole di classe C^2 è una soluzione classica.

2.1 Definizione e proprietà elementari degli spazi di Sobolev $\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un insieme aperto e sia $1 \geq p \geq \infty$.

Definizione 2.3. *Lo* ***Spazio di Sobolev*** $\mathcal{W}^{1,p}$ *è definito da*

$$\mathcal{W}^{1,p} = \{u \in L^p(\Omega) | \exists g_1, g_2, \ldots, g_N \in L^p(\Omega)\ \textit{tali che}\ \int_\Omega u\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} = -\int_\Omega g_i\varphi \quad \forall\varphi \in C_c^\infty(\Omega),\ \forall i = 1, \ldots, N\}$$

Si pone

$$H^1(\Omega) = \mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$$

Per $u \in \mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$, porremo

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = g_i \text{ e } \nabla u = (\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_N}) = \text{grad}u$$

Lo spazio $\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$ è munito della norma

$$\|u\|_{\mathcal{W}^{1,p}} = \|u\|_{L^p} + \sum_{i=1}^{N} \|\frac{\partial u}{\partial x_i}\|_{L^p}$$

Lo spazio $H^1(\Omega)$ è munito del prodotto scalare

$$(u,v)_{H_1} = (u,v)_{L^2} + \sum_{i=1}^{N} (\frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial u}{\partial x_i})_{L^2}$$

La norma associata

$$\|u\|_{H^1} = (\|u\|_{L^2}^2 + \sum_{i=1}^{N} \|\frac{\partial u}{\partial x_i}\|_{L^2}^2)^{\frac{1}{2}}$$

è equivalente alla norma di $\mathcal{W}^{1,2}$.

Proposizione 2.4. *Lo spazio $\mathcal{W}^{1,p}$ è:*

- *Spazio di Banach per $1 \leq p \leq \infty$*
- *Riflessivo per $1 < p < \infty$*
- *Separabile per $1 \leq p < \infty$*

In particolare, H^1 è uno spazio di Hilbert separabile.

Esempio 2.5 (Problema di Dirchlet omogeneo)**.** *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un aperto limitato; cerchiamo una funzione $u : \Omega \to \mathbb{R}$ verificante*

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f & \textit{in } \Omega \\ u = 0 & \textit{su } \Gamma = \partial\Omega \end{cases} \tag{9}$$

ove

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2 u}{\partial {x_i}^2} = \textit{Laplaciano di } u$$

*e f è una funzione assegnata su Ω. La **condizione ai limiti** $u = 0$ su Γ prende il nome di **condizione di Dirichlet** (omogeneo).*

Definizione 2.6. *Sia $1 \leq p < \infty$; $\mathcal{W}_0^{1,p}(\Omega)$ indica la chiusura di $C_c^1(\Omega)$ in $\mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$. Si pone poi*

$$H_0^1(\Omega) = \mathcal{W}_0^{1,2}(\Omega)$$

Definizioni 2.7. *Una soluzione **classica** di (9) è una funzione $u \in C^2(\overline{\Omega})$ verificante (9). Una soluzione **debole** di (9) è una funzione $u \in H_0^1(\Omega)$ verificante*

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v + \int_\Omega uv = \int_\Omega fv \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega) \tag{10}$$

Ricordiamo i passi descritti prima:

Passo A **Ogni soluzione classica è una soluzione debole**.

Passo B **Esistenza ed unicità della soluzione debole**.
È data dal seguente

Teorema 2.8 (Dirichlet, Riemann, Hilbert)**.** *Per ogni $f \in L^2(\Omega)$ esiste $u \in H_0^1(\Omega)$ unica soluzione debole di (9).*
Inoltre u si ottiene mediante il problema

$$\min_{v \in H_0^1(\Omega)} \{ \frac{1}{2} \int_\Omega (|\nabla v|^2 + v^2) - \int_\Omega fv \}$$

Questo è il ***principio di Dirichlet****.*

Passo C **Regolarità della soluzione debole**

Passo D **Ritorno ad una soluzione classica**

Per la dimostrazione del teorema (2.1) abbiamo bisogno di altri due importanti risultati:

Teorema 2.9 (Rellich-Kondrachov)**.** *Supponiamo Ω limitato di classe C^1. Si ha:*

se $p < N$, allora $\mathcal{W}^{1,p} \subset L^q(\Omega)$ $\forall q \in [1, p^*)$ con $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}$

se $p = N$, allora $\mathcal{W}^{1,p} \subset L^q(\Omega)$ $\forall q \in [1, \infty)$

se $p > N$, allora $\mathcal{W}^{1,p} \subset C(\overline{\Omega})$

con immersioni compatte.
In particolare $\mathcal{W}^{1,p}(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ con immersione compatta, qualunque sia p.

Proposizione 2.10 (Disuguaglianza di Poincaré)**.** *Supponiamo che Ω sia un aperto limitato. Allora esiste una costante C (dipendente da Ω e p) tale che*

$$\|u\|_{L^p} \leq C \|\nabla u\|_{L^p} \qquad \forall u \in \mathcal{W}_0^{1,p}(\Omega) \ (1 \leq p < \infty)$$

In particolare l'espressione $\|\nabla u\|_{L^p}$ è una norma su $\mathcal{W}_0^{1,p}(\Omega)$ che è equivalente alla norma $\|u\|_{W^{1,p}}$; su $H_0^1(\Omega)$ l'espressione $\int_\Omega \nabla u \nabla v$ è un prodotto scalare che induce la norma $\|\nabla u\|_{L^2}$ equivalente alla norma $\|u\|_{H^1}$.

Vediamo il Teorema 2.1 nel caso 1-dimensionale.
Sia $I = (0, 1)$.

Teorema 2.11. *Siano $p \in C^1(\overline{I})$ con $p \geq \alpha > 0$ su I e $q \in C(\overline{I})$.*
Allora esiste una successione $(\lambda_n)_{n \geq 1}$ di reali e una base Hilbertiana $(e_n)_{n \geq 1}$ di $L^2(I)$ tale che $e_n \in C^2(\overline{I})$ e

$$\begin{cases} -(pe_n')' + qe_n = \lambda_n e_n & su\ I \\ e_n(0) = e_n(1) = 0 \end{cases} \tag{11}$$

Inoltre $\lambda_n \to +\infty$ se $n \to +\infty$

Dimostrazione. Possiamo sempre supporre $q \geq 0$, altrimenti possiamo scegliere una costante C tale che $q+C \geq 0$, ciò che corrisponde a sostituire λ_n con λ_n+C nell'equazione (11). Per ogni $f \in L^2(I)$, esiste allora $u \in H^2(I) \cap H_0^1(I)$ unica verificante

$$\begin{cases} -(pu')' + qu = f & \text{su } I \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \tag{12}$$

Indichiamo con T l'operatore $f \to u$ **considerato come operatore di** $L^2(I)$ **in** $L^2(I)$. Verifichiamo che T è autoaggiunto e compatto.
Si ha grazie alla (12)

$$\int_i pu'^2 + \int_i qu^2 = \int_i fu$$

e dunque $\alpha\|u'\|_{L^2}^2 \leq \|f\|_{L^2}\|u\|_{L^2}$. Ne segue che $\|u\|_H^1 \leq C\|f\|_{L^2}$ (ove C è una costante che dipende solo da α), e ciò equivale a

$$\|Tf\|_{H^1} \leq C\|f\|_{L^2}$$

Poiché l'immersione di $H^1(I)$ in $L^2(I)$ è compatta (in quanto I è **limitato**) se ne deduce che T è un operatore compatto di $L^2(I)$ in $L^2(I)$. Mostriamo che

$$\int_I (Tf)g = \int_I f(Tg) \qquad \forall f, g \in L^2(I)$$

Infatti, poniamo $u = Tf$ e $v = Tg$; ne segue

$$-(pu')' + qu = f \tag{13}$$

$$-(pv')' + qv = f \tag{14}$$

Moltiplicando (13) per v e (14) per u e integrando, otteniamo

$$\int_I pu'v' + \int_I quv = \int_I fv = \int_I gu$$

Notiamo infine che

$$\int_I (Tf)f = \int_I uf = \int_I (pu'^2 + qu^2) \geq 0 \tag{15}$$

e, d'altra parte $N(T) = \{0\}$, in quanto se $Tf = u = 0$, allora $f = 0$.
In base al teorema 1.21, $L^2(I)$ ammette una base Hilbertiana $(e_n)_{n\geq 1}$ costituita di autovettori di T associati agli autovalori $(\mu_n)_{n\geq 1}$. Si ha $\mu_n > 0$ (infatti $\mu_n \geq 0$ per la (15)) e $\mu_n \neq 0$ giacché $N(T) = \{0\}$) e si sa che $\mu_n \to 0$.
Scrivendo la relazione $Te_n = \mu_n e_n$, si vede che

$$-(pe'_n)' + qe_n = \lambda_n e_n \text{ ove } \lambda_n = \frac{1}{\mu_n}$$

Infine notiamo che $e_n \in C^2(\bar{I})$ giacché $f = \lambda_n e_n \in C(\bar{I})$. $\square$

Teorema 2.1. Data $f \in L^2(\Omega)$, indichiamo con $u = Tf$ l'unica soluzione $u \in H_0^1(\Omega)$ del problema

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \varphi = \int_\Omega f\varphi \qquad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega) \tag{16}$$

Consideriamo l'operatore T come un operatore di $L^2(\Omega)$ in $L^2(\Omega)$.
T è un operatore autoaggiunto e compatto (riprendere la dimostrazione del teorema 2.11 ed utilizzare il fatto che l'immersione $H_0^1 \subset L^2$ è **compatta**). D'altra parte $N(T) = \{0\}$ e $(Tf, f) \geq 0 \quad \forall f \in L^2$.
Ne segue (grazie al teorema 1.21) che L^2 ammette una base Hilbertiana (e_n) costituita di autovettori di T associati a degli autovalori μ_n con $\mu_n \to 0$. Si ha perciò $e_n \in H_0^1$ e

$$\int_\Omega \nabla e_n \nabla \varphi = \frac{1}{\mu_n} \int_\Omega e_n \varphi \qquad \forall \varphi \in H_0^1$$

In altre parole e_n è una soluzione debole di (9) con $\lambda_n = \frac{1}{\mu_n}$. In base ai risultati di regolarità (che non abbiamo trattato) sappiamo che $e_n \in H^2(\omega)$ per ogni $\omega \subset\subset \Omega$; da cui $e_n \in H^4(\omega)$ per ogni $\omega \subset\subset \Omega$, $e_n \in H^6(\omega)$ per ogni $\omega \subset\subset \Omega$, e così via. Dunque si ha $e_n \in \bigcap_{m \geq 1} H^m(\omega)$ per ogni $\omega \subset\subset \Omega$ e di conseguenza $e_n \in C^\infty(\omega)$ per ogni $\omega \subset\subset \Omega$; cioè $e_n \in C^\infty(\Omega)$ $\square$