Disuguaglianza di Riesz

Annalisa Gubbiotti Giulia Campagna

1 Riordinamento di insiemi e funzioni

Definizione 1. Se $A \subset \mathbb{R}^n$ è un insieme Boreliano di misura di Lebesgue finita, definiamo A^* il simmetrico riordinamento dell'insieme A dove A^* è la palla aperta centrata nell'origine il cui volume è lo stesso di A.

$$A^* = \{x : |x| < r\} \quad con \quad (|S^{n-1}|/n) * r^n = L^n(A),$$

dove $|S^{n-1}|$ area superficiale di S^{n-1}

Definizione 2. Se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ è una funzione Borel misurabile nulla all'infinito definiamo l'ordinamento simmetrico decrescente di una funzione come

$$f^*(x) = \int_0^\infty \chi^*_{\{|f|>t\}}(x)dt \quad dove \quad \chi^*_A := \chi_{A^*} \tag{1}$$

Definizione 3. Se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ è una funzione Borel misurabile, diciamo che f è nulla all'infinito se $L^n(\{x : |f(x)| > t\})$ è finito $\forall t > 0$

Teorema 1.1 (Layer cake representation)**.** *Sia ν una misura sugli insiemi Boreliani definiti sulla retta reale positiva $[0, \infty)$ tale che*

$$\phi(t) := \nu([0, t])$$

è finita $\forall t > 0$.(Notiamo che $\phi(0) = 0$ e che ϕ, essendo monotona, è Borel misurabile). Sia (Ω, Σ, μ) uno spazio misurabile e sia f una funzione misurabile non negativa, allora

$$\int_\Omega \phi(f(x) * \mu(dx)) = \int_0^\infty \mu(\{x : f(x) > t\})\nu(dt)$$

In particolare scegliendo $\nu(dt) = pt^{p-1}dt$ per $p > 0$, abbiamo

$$\int_\Omega f(x)^p \mu(dx) = p \int_0^\infty t^{p-1}\mu(\{x : f(x) > t\})(dt)$$

Scegliendo ν come misura di Dirac $x \in \mathbb{R}^n$ e $p = 1$ abbiamo

$$f(x) = \int_0^\infty \chi_{\{f>t\}}(x)dt \tag{2}$$

Dimostrazione. Ricordiamo che

$$\int_0^\infty \mu(\{x : f(x) > t\})\nu(dt) = \int_0^\infty \int_\Omega \chi_{\{f>t\}}(x)\mu(dx)\nu(dt)$$

e che $\chi_{f>t}(t)$ è un insieme misurabile. Applicando il teorema di Fubini

$$\int_\Omega (\int_0^\infty \chi_{\{f>t\}}(x)\nu(dt))\mu(dx)$$

segue

$$\int_0^\infty \chi_{\{f>t\}}(x)\nu(dt) = \int_0^{f(x)} \nu(dt) = \phi(f(x)).$$

□

Osservazione 1. Il riordinamento f^* ha numerose proprietà:

1. $f^*(x)$ è non negativa.
2. $f^*(x)$ è radialmente simmetrica e non crescente, cioè

   $$f^*(x) = f^*(y) \text{ se } |x| = |y|$$

   e

   $$f^*(x) \geq f^*(y) \text{ se } |x| \leq |y|$$

   (Diciamo che f^* è strettamente simmetrica decrescente se $f^*(x) > f^*(y)$ quando $|x| < |y|$.
   In particolare questo implica che $f^*(x) > 0 \ \forall x$)
3. $f^*(x)$ è una funzione semicontinua inferiormente visto che gli insiemi $\{x : f^*(x) > t\}$ sono aperti $\forall t > 0$
4. Gli insiemi di livello di f^* sono i riordinamenti degli insiemi di livello di $|f|$, cioè

   $$\{x : f^*(x) > t\} = \{x : |f(x)| > t\}^*. \tag{3}$$

   Un'importante conseguenza è l'**equimisurabilità** delle funzioni $|f|$ e f^*, cioè

   $$L^n\{x : |f(x)| > t\} = L^n\{x : f^*(x) > t\} \quad \forall t > 0 \tag{4}$$

   Da questo,e dal teorema di rappresentazione della torta a strati, segue

   $$\int_{\mathbb{R}^n} \phi(|f(x)|)dx = \int_{\mathbb{R}^n} \phi(f^*(x))dx \tag{5}$$

   per ogni funzione ϕ che è differenza di due funzioni monotone ϕ_1 e ϕ_2, tali che entrambi gli integrali $\int_{\mathbb{R}^n} \phi_1(|f(x)|)dx$ e $\int_{\mathbb{R}^n} \phi_2(|f(x)|)dx$ siano finiti.
   In particolare abbiamo che $\forall f \in L^p(\mathbb{R}^n)) \Rightarrow \| f \|_p = \| f^* \|_p \ \forall\ 1 \leq p \leq \infty$

5. Se $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ è una funzione non decrescente, allora $(\Phi \circ |f|)^* = \Phi \circ f$ (cioè $(\Phi \circ |f|)^* = \Phi(f^*(x))$)

6. Il riordinamento **preserva l'ordine**, cioè supponiamo che f e g siano due funzioni non negative di $\mathbb{R}^n$, nulle all'infinito, e supponiamo ulteriormente che $f(x) \leq g(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$, allora i loro riordinamenti soddisfano $f^*(x) \leq g^*(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$.
(Questo segue immediatamente dal fatto che la diseguaglianza $f(x) \leq g(x)$ $\forall x$ è equivalente a dire che gli insiemi di livello di g contengono gli insiemi di livello di f)

2 La più semplice diseguaglianza di riordinamento

Teorema 2.1. *Siano f e g funzioni non negative di $\mathbb{R}^n$, nulle all'infinito, e siano f^* e g^* i loro riordinamenti simmetrici decrescenti. Allora*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(x)dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} f^*(x)g^*(x)dx \tag{6}$$

(Se $\int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(x)dx = \infty$ anche $\int_{\mathbb{R}^n} f^*(x)g^*(x)dx = \infty$)
Se f è strettamente simmetrica decrescente, allora

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} f^*(x)g^*(x)dx \Longleftrightarrow g = g^*$$

Dimostrazione. Applicando il teorema "*layer cake*" e il teorema di Fubini alle funzioni f,g,f^*,g^* la disuguaglianza (6) diventa:

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{\{f>t\}}(x)\chi_{\{g>s\}}(x)dxdsdt \leq \int_0^\infty \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} \chi^*_{\{f>t\}}(x)\chi^*_{\{g>s\}}(x)dxdsdt$$

Così la dimostrazione del caso generale segue immediatamente dalla dimostrazione del caso in cui f e g sono funzioni caratteristiche di insiemi con misura di Lebesgue finita.
Perciò dobbiamo dimostrare che per insiemi misurabili A e B di $\mathbb{R}^n$ vale $\int \chi_A\chi_B \leq \int \chi^*_A\chi^*_B$, che equivale a dire che $L^n(A \cap B) \leq L^N(A^* \cap B^*)$.
Assumiamo $L^n(A) \leq L^n(B)$.
Allora $A^* \subset B^*$ e $L^n(A^* \cap B^*) = L^n(A^*)$, inoltre $L^n(A^*) = L^n(A)$ per definizione di A^*. Ma $L^n(A \cap B) \leq L^n(A)$ così otteniamo $L^n(A \cap B) \leq L^n(A) = L^N(A^* \cap B^*)$ che prova la diseguaglianza.
Ora passiamo alla dimostrazione della seconda parte del teorema.
Per avere l'uguaglianza in (6) è necessario che

$$\int_{\mathbb{R}^n} f\chi_{\{g>s\}} = \int_{\mathbb{R}^n} f\chi^*_{\{g>s\}} \text{ per q.o. } s > 0 \tag{7}$$

questo implica che $\chi_{\{g>s\}} = \chi^*_{\{g>s\}}$ per q.o. $s > 0$ e quindi $g = g^*$.
Dimostriamo che $g = g^*$. Visto che f è strettamente simmetrica decrescente,

ogni $B_{0,r}$ è un sopra livello di f, infatti esiste una funzione continua $r(t)$ $t.c$ $\{x : f(x) > t\} = B_{0,r(t)}$.
Questo implica che per ogni insieme misurabile C $F_C(t) := \int \chi_{\{f>t\}}(x)\chi_C(x)dx$ è una funzione continua di t.
Ora fissiamo $s > 0$ per il quale vale (7) e prendiamo $C = \{x : g(x) > s\}$.
Da (6) segue che $F_C(t) \leq F_{C^*}(t)$.
Dalla (7) abbiamo $\int F_C(t)dt = \int F_{C^*}(t)dt$ e quindi $F_C(t) = F_{C^*}(t)$ per q.o $t > 0$, ma per la continuità di F_C e di F_{C^*} possiamo concludere che $F_C(t) = F_{C^*}(t)$ $\forall t > 0$.
Questo implica che per ogni $r > 0$ sia $C \subset B_{0,r}$ e $C^* \subset B_{0,r}$, o altrimenti $C \supset B_{0,r}$ e $C^* \supset B_{0,r}$.
Così $C = C^*$.
Quindi $g = g^*$. □

Osservazione 2. La seguente disuguaglianza è la contraria della precedente:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f\chi_{\{g\leq s\}} \geq \int_{\mathbb{R}^n} f^*\chi_{\{g^*\leq s\}} \tag{8}$$

La dimostrazione può essere fatta sostituendo $\chi_{\{g\leq s\}} = 1 - \chi_{\{g>s\}}$ e applicando la disuguaglianza (6) , a patto che f sia sommabile.
Altrimenti la disuguaglianza si può provare con una dimostrazione analoga a quella del teorema precedente.

Supponiamo f e g funzioni non negative su $L^2(\mathbb{R}^n)$, allora

$$\| f^* - g^* \|_2 \leq \| f - g \|_2 \tag{9}$$

e si può generalizzare per ogni $1 \leq p \leq \infty$, che implica che il riordinamento è **non espansivo** in $L^p(\mathbb{R}^n)$.
La seguente disuguaglianza di riordinamento è una raffinazione di (6) e usa (7) .

3 Disuguaglianza di Riesz in una dimensione

Lemma 3.1. *Siano f,g e h tre funzioni non negative sulla retta dei reali, nulle all'infinito. Definiamo $I(f, g, h) := \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} f(x)g(x - y)h(x)dxdy$. Allora:*

$$I(f, g, h) \leq I(f^*, g^*, h^*), \tag{10}$$

($I(f^*, g,^*, h^*) = \infty$ se $I(f, g, h) = \infty$)

Dimostrazione. Utilizzando il teorema "*layer cake*" (e il teorema di Fubini) ci possiamo restringere al caso in cui f, g, h sono funzioni caratteristiche di insiemi misurabili di misura finita. Indichiamo queste funzioni con F, G, H

e con le stesse lettere indichiamo anche gli insiemi corrispondenti. Per la regolarità della misura esterna di Lebesgue esiste una sequenza di insiemi aperti F_k con $F \subset F_k \subset F_{k-1}$ per ogni k e $\lim_{k\to\infty} L^1(F_k) = L^1(F)$. In particolare tutti gli F_k hanno misura finita. Allo stesso modo scegliamo gli insiemi G_k e H_k. Il teorema di convegenza dominata mostra che

$$\lim_{k\to\infty} I(F_k, G_k, H_k) = I(F, G, H).$$

chiaramente

$$\lim_{k\to\infty} I(F_k^*, G_k^*, H_k^*) = I(F^*, G^*, H^*).$$

E' quindi sufficiente dimostrare il lemma nel caso in cui F, G, H sono insiemi aperti di misura finita.
Ora, ogni sottoinsieme aperto F della retta reale è unione disgiunta di intervalli numerabili.(?) Indichiamo questi intervalli con $I_1, I_2, ...$ dove la numerazione è scelta in modo tale che $L^1(I_{k+1}) \leq L^1(I_k)$. Se poniamo

$$F_m = \bigcup_{k=1}^{m} I_k$$

abbiamo che

$$\lim_{k\to\infty} L^1(F_m) = \sum_{k=1}^{\infty} L^1(I_k) = L(F)$$

e, per il teorema di convergenza monotona abbiamo che

$$\lim_{m\to\infty} I(F_m, G_m, H_m) = I(F, G, H).$$

e che

$$\lim_{m\to\infty} I(F_m^*, G_m^*, H_m^*) = I(F^*, G^*, H^*).$$

Quindi è sufficiente dimostrare il lemma per funzioni F, G, H che sono funzioni caratteristiche delle unioni finite disgiunte di intervalli aperti. Quindi possiamo scrivere

$$F(x) = \sum_{j=1}^{k} f_j(x - a_j)$$

dove f_j è la funzione caratteristica di un intervallo centrato nell'origine e gli a_j sono numeri reali. Allo stesso modo possiamo scrivere

$$G(x) = \sum_{j=1}^{l} g_j(x - b_j) \quad e \quad H(x) = \sum_{j=1}^{m} h_j(x - c_j).$$

Ora $I(F, G, H)$ è una somma di termini della forma

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(x-a)g(x-y-b)h(y-c)dxdy$$

Vogliamo mostrare che $I(F, G, H)$ è più grande se uniamo ogni famiglia di intervalli in uno, che poi centriamo nell'origine. A tal fine consideriamo la famiglia di funzioni $F_t(x)$, $G_t(x)$, $H_t(x)$ dove $f_j(x - a_j)$ è stata sostituita con $f_j(x - ta_j)$, $0 \leq t \leq 1$, etc. Ora,

$$\begin{aligned} I_{jkl}(t) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f_j(x - ta) g_k(x - y - tb) h_l(y - tc) dx dy &= \\ \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f_j(x) g_k(x - y) h_l(y + (a - b - c)t) dx dy &= \\ \int_{\mathbb{R}} u_{jk}(y) h_l(y + (a - b - c)t) dy. \end{aligned}$$

$u_{j,k}(y) = \int f_j(x) g_k(x - y) dx$ è una funzione simmetrica decrescente. E' facile vedere che $I_{jkl}(t)$ è non decrescente per t che varia tra 1 e 0. Quindi $I(F_t, G_t, H_t)$ è non decrescente per t che varia tra 1 e 0 (in sostanza questo è il teorema (2.1)). Appena t inizia a decrescere gli intervalli associati con F_t, G_t e H_t iniziano a muoversi lungo una retta verso l'origine, non appena i due intervalli associati alla stessa funzione si toccano interrompiamo il processo e lo ridefiniamo con questi due intervalli uniti in un unico intervallo. Ripetendo questo processo un numero finito di volte alla fine rimarremo eventualmente con tre intervalli, ognuno dei quali centrato nell'origine. Chiaramente questo processo non modifica la misura totale di questi insiemi e $I(F, G, H)$ non è stato diminuito. Questo dimostra il lemma. □

4 Disuguaglianza del riordinamento di Riesz

Prima di enunciare il prossimo teorema diamo delle definizioni che saranno utili nella dimostrazione:

Definizione 4. Sia f una funzione misurabile, e un asse di $\mathbb{R}^n$ (con $|e| = 1$).
Ruotiamo $\mathbb{R}^n$ di una rotazione ρ tale che $\rho e = (1, 0, 0, ..., 0)$.
Sia $(\rho f)(x) := f(\rho^{-1} x)$.
Definiamo il riordinamento simmetrico decrescente 1-dimensionale di (ρf) rispetto alla variabile x_1 come $(\rho f)^{*1}(x_1, x_2, ..., x_n)$, ottenuto tenendo fisse le variabili $x_2, ..., x_n$.
Sostituiamo $(\rho f)(x_1, x_2, ..., x_n)$ con $(\rho f)^{*1}(x_1, x_2, ..., x_n)$.
Infine applichiamo la rotazione inversa ρ^{-1} a $\mathbb{R}^n$.
La funzione risultante $f^{*e} := \rho^{-1}((\rho f)^{*1})$ è la **Simmetrizzazione di Steiner** di una funzione misurabile che rispetta un asse di $\mathbb{R}^n$.

Definizione 5. La Simmetrizzazione di Steiner di un insieme misurabile F si denota con F^{*e} ed è l'insieme corrispondente al riordinamento della funzione caratteristica χ_F^{*e}

Osservazione 3. Ogni insieme F^{*e}, e quindi ogni funzione f^{*e} è misurabile, infatti si può far vedere che F^{*1} può essere pensato come il grafico di una funzione m di $\mathbb{R}^{n-1}$ così definita:

$$m(x_2, ..., x_n) := \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \chi_F^{*1}(x_1, x_2, ...x_n) dx_1$$

La funzione m è misurabile dato che per la definizione di riordinamento si ha:

$$m(x_2, ..., x_n) = \widehat{m}(x_2, ..., x_n) := \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \chi_F(x_1, x_2, ...x_n) dx_1$$

e $\widehat{m}$ è misurabile per il teorema di Fubini.

Definizione 6. Definiamo la simmetrizzazione di Schwarz di insiemi e funzioni analogamente alla simmetrizzazione di Steiner, però invece di sostituire (ρf) con il suo riordinamento simmetrico decrescente 1-dimensionale, questa volta sostituiamo (ρf) per ogni valore di x_1 con il suo $(n-1)$-dimensionale riordinamento fatto rispetto le variabili $(x_2, ...x_n)$.

Teorema 4.1. *Siano f, g, h funzioni non negative di $\mathbb{R}^n$. Allora definendo*

$$I(f, g, h) := \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) g(x-y) h(y) dx dy$$

si ha

$$I(f, g, h) \leq I(f^*, g^*, h^*). \tag{11}$$

Se $I(f, g, h) = \infty$ allora $I(f^*, g^*, h^*) = \infty$.

Il punto di partenza è il teorema (3.1), che rappresenta la versione 1-dimensionale di questo appena enunciato.
Il teorema *layer cake* permette di restringere la dimostrazione al caso in cui f, g, h sono funzioni caratteristiche di insiemi misurabili F, G, H di misura finita. Denoteremo $I(\chi_F, \chi_G, \chi_H)$ con $I(F, G, H)$.
Per ogni asse e possiamo considerare i tre insiemi F^{*e}, G^{*e}, H^{*e}, dal teorema precedente e dal teorema di Fubini sappiamo che $I(F, G, H) \leq I(F^{*e}, G^{*e}, H^{*e})$.
Il nostro scopo nella dimostrazione è quello di trovare una sequenza di assi $e_1, e_2, ...$ tali che ripetendo la simmetrizzazione di Steiner di F rispetto a tali assi si ottiene una successione che converge in senso opportuno nella palla F^*. Notiamo che G e H vengono riordinate insieme ad F e passando eventualmente ad una sottosuccessione possiamo assumere che anche le successioni di G e H convergono su qualche insieme. Così possiamo concludere che l'estremo superiore di $I(F, G, H)$ su tutti gli insiemi con misura $L^n(F), L^n(G), L^n(H)$ si ha quando $F = F^*$. Dopo, usando nuovamente l'argomento possiamo concludere che $G = G^*$ e $H = H^*$ sono ottimali e così abbiamo provato il teorema.
Dimostriamo il teorema per $n = 2$.

Dimostrazione. COMPATTEZZA Assumiamo per semplicità che $L^2(F) = 1$. Con un semplice argomento di approssimazione e usando il teorema di convergenza monotona è sufficiente provare il teorema solo sugli insiemi limitati. Se $F \neq F^*$ allora $L^2(F \cap F^*) = \int \chi_F \chi_F^* = P < 1$. Noi vorremmo trovare un riordinamento d'assi e_1 tale che, con $F_1 := F^{*e_1}$ e $\chi_1 := \chi_{F_1}$, l'integrale $\int \chi_1 \chi_F^* = P + \delta$ con $\delta > 0$. Per trovare un tale e_1 poniamo $A = \chi_F^*(1 - \chi_F)$ e $B = (1 - \chi_F^*)\chi_F$ e consideriamo la convoluzione $C(x) = \int A(x-y)B(-y)dy$. Dato che $\int C = (1-P)^2$, C è una funzione non nulla, inoltre c'è qualche $x \neq 0$ tale che $C(x) > 0$ e così poniamo $e_1 = x/|x|$. Ora è semplice, usando la definizione di Simmetrizzazione di Steiner, mostrare che la simmetrizzazione rispetto a e_1 ha l'effetto desiderato con $\delta \geq C(x)$.(???)
Denotiamo con $\overline{\delta}_1 > 0$ l'estremo superiore di tutti i δ, visto che non ci interessa provare che $\overline{\delta}_1$ può essere raggiunto, ci accontentiamo del miglioramento $\delta_1 \geq \frac{1}{2}\overline{\delta}_1$ che certamente può essere raggiunto con un opportuna scelta di e_1, così otteniamo $\int \chi_1 \chi_F^* = P + \overline{\delta}_1$.
Ora eseguiamo una simmetrizzazione di Steiner parallela all'asse x_1, e in seguito una parallela all'asse x_2, queste certamente non diminuiscono il valore di $\int \chi_1 \chi_F^*$. Dopo queste due simmetrizzazioni l'insieme F_1 giace tra una certa funzione simmetrica decrescente e non negativa $x_2 = S_1(x_1)$, e la sua riflessa $x_2 = -S_1(x_1)$.
Fatto questo ripetiamo il processo, cioè cerchiamo un asse e_2 cosicchè, con $\chi_2 := \chi_{F_2}$, abbiamo $\int \chi_2 \chi_F^* = P + \overline{\delta}_1 + +\overline{\delta}_2$ e $\delta_2 \geq \frac{1}{2}\overline{\delta}_2$, dove $\overline{\delta}_2 > 0$ è il maggiore di tutti i possibili incrementi. A questa simmetrizzazione ne seguono, come prima, due in due assi coordinati dando luogo ad una nuova funzione simmetrica decrescente $x_2 = S_2(x_1)$.
Questo processo viene ripetuto indefinitamente dando luogo ad una sequenza di insiemi $F_1, F_2, F_3, ...$ e di funzioni $S_1, S_2, S_3, ...$ che delimitano questi insiemi. Notiamo che visto che F è limitata è contenuta in una qualche palla centrata B, quindi per le proprietà del riordinamento (vi) tutte le funzioni F_j sono contenute nella stessa palla e quindi le funzioni S_j sono uniformemente limitate e hanno supporto in un intervallo fissato.
Affermiamo che $\int \chi_j \chi_F^*$ converge ad 1.
Per dimostrare l'affermazione supponiamo che sia vero il contrario, cioè che $\int \chi_j \chi_F^* \to Q < 1$. Possiamo scegliere una sottosuccessione, dalla successione di funzioni S_j, che continueremo a denotare con S_j, tale che le S_j convergano puntualmente ad una qualche funzione simmetrica decrescente S.[Tale sottosuccessione possiamo trovarla per il **principio di selezione di Helly**, infatti visto che le S_j sono uniformemente limitate e hanno supporto su un intervallo fissato, possiamo trovare una sottosuccessione che converge in *tutti* i punti razionali $x_1 \neq 0$, dato che sono numerabili, e visto che le S_j sono simmetriche decrescenti convergono anche per gli x_1 irrazionali.] La sottosuccessione trovata converge necessariamente a S in $L^1(\mathbb{R}^1)$per la convergenza dominata e quindi, se W denotano l'insieme che giace tra S e $-S$

abbiamo

$$\int \chi_W \chi_F^* = \lim_{j \to \infty} \int \chi_J \chi_F^* = Q,$$

mentre $\int \chi_W = 1$.
Per ottenere una contraddizione notiamo, per prima cosa, che per la convoluzione usata all'inizio c'è un $\delta > 0$ e un asse e tali che $W_* := W^{*e}$, che insieme alla funzione caratteristica χ_{W_*} soddisfa $\int \chi_{W_*} \chi_F^* > Q + \delta$. In altre parole, usando le convergenze indicate, possiamo trovare un intero J tale che F_J soddisfa due condizioni:

- $\int \chi_{F_J} \chi_F^* > Q - \delta/8$
- $\| \chi_{F_J} - \chi_W \|_2 < \delta/4$

Sia $F_{J*} := F_J^{*e}$. Dal teorema (**??**) abbiamo che $\| \chi_{F_{J*}} - \chi_{W*} \|_2 < \delta/4$. Usando la disuguaglianza triangolare e la disuguaglianza di Schwarz possiamo concludere che $\int \chi_{F_{J*}} \chi_F^* > Q + 3\delta/4$. Questo implica che il massimo miglioramento al $j-$esimo passo, $\overline{\delta}_J$, è più grande di $3\delta/4$. In altre parole

$$Q > \int \chi_{F_{J+1}} \chi_F^* \geq \int \chi_{F_J} \chi_F^* + \frac{1}{2} \overline{\delta}_J > Q - \frac{1}{8}\delta + \frac{1}{2}\overline{\delta}_J$$

che implica $\overline{\delta}_J < \delta/4$, e così abbiamo ottenuto la contraddizione.

□

La dimostrazione del teorema per $n > 2$ è la stessa, dobbiamo solo usare la simmetrizzazione di Schwarz al posto di quella di Steiner.