AM310 2012- Sett. 11.

IL TEOREMA DI COMPATTEZZA DI RELLICH.

Sia $\quad u_n \in C_0^\infty(B_R), \quad$ con $\quad \sup_n \left(\int\limits_{\mathbf{R}^N} |\nabla u_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} < +\infty \, . \quad$ Allora

(i) se $< p < N$, u_n ha una sottosuccessione convergente in $L^r(B_R)\ \forall r < \frac{Np}{N-p}$.

(ii) se $p = N$, u_n ha una sottosuccessione convergente in $L^r(B_R) \ \ \forall r$.

(iii) se $p > N$, u_n ha una sottosuccessione uniformemente convergente in B_R

Prova. (i) Sia $1 \le r < \frac{Np}{N-p}$. Da Holder e quindi Sobolev segue che

$$\sup_n \left(\int\limits_{B_R} |u_n|^r \right)^{\frac{1}{r}} \le c(R) \sup_n \left(\int\limits_{\mathbf{R}^N} |\nabla u_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} < +\infty$$

Poi, la diseguaglianza di interpolazione con $\quad \alpha \in (0,1], \ \alpha + (1-\alpha)\frac{N-p}{Np} = \frac{1}{r} \quad$ dá

$$\left(\int\limits_{\mathbf{R}^N} |u_n(x+h) - u_n(x)|^r \, dx \right)^{\frac{1}{r}} \le$$

$$\left(\int\limits_{\mathbf{R}^N} |u_n(x+h) - u_n(x)| \right)^{\alpha} \left(\int\limits_{\mathbf{R}^N} |u_n(x+h) - u_n(x)|^{\frac{Np}{N-p}} \right)^{\frac{(1-\alpha)(N-p)}{Np}}$$

Il secondo fattore, grazie a Sobolev, resta, nelle nostre ipotesi, limitato e

$$\int\limits_{\mathbf{R}^N} |u_n(x+h) - u_n(x)| \, dx \le \int\limits_{\mathbf{R}^N} \left(\int_0^1 | < \nabla u_n(x+th), h > | dt \right) \, dx$$

$$\le vol(B_{2R})^{1-\frac{1}{p}} \, |h| \int_0^1 \left(\int\limits_{\mathbf{R}^N} |\nabla u_n(x+th)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} dt \le c|h| \sup_n \left(\int\limits_{\mathbf{R}^N} |\nabla u_n(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

La compattezza di u_n in $L^r(\mathbf{R}^N)$ segue quindi da Frechet-Kolmogoroff.

(ii) In tal caso $\sup_n \left(\int\limits_{\mathbf{R}^N} |\nabla u_n|^r\right)^{\frac{1}{r}} < +\infty \quad \forall r$, e quindi, come in (i), otteniamo la compattezza di u_n in ogni L^r.

(iii) La (i) nel Teorema di Morrey dice $\sup_n \|u_n\|_\infty < +\infty$ mentre la (ii) assicura la equicontinuitá delle u_n. La conclusione segue quindi dal Teorema di Ascoli-Arzelá.

Nota. Rellich non vale in tutto $\mathbf{R}^N$ né fino all'esponente limite $p^* := \frac{Np}{N-p}$.

(i) Se $f \in C_0^\infty(\mathbf{R}^N)$, $f \neq 0$, $h \in \mathbf{R}^N, h \neq 0$, $f_n(x) := f(x + nh)$, allora $\|\nabla f_n\|_2 \equiv \|\nabla f\|_2$, ma f_n non ha estratte convergenti in alcun L^p

(i) Se $f \in C_0^\infty(B_1)$, $f \neq 0$, $\epsilon_n \to_n 0$, $f_n(x) := \epsilon_n^{\frac{N-2}{2}} f(\frac{x}{\epsilon_n})$ allora

$$\|\nabla f_n\|_2 \equiv \|\nabla f\|_2, \qquad \|f_n\|_{\frac{2N}{N-2}} \equiv \|f_n\|_{\frac{2N}{N-2}}$$

e quindi f_n non ha estratte convergenti in $L^{\frac{2N}{N-2}}$ (mentre converge a zero in L^p per $1 \leq p < \frac{2N}{N-2}$).

SPAZI DI SOBOLEV: DISEGUAGLIANZE DI SOBOLEV E TEOREMA DI RELLICH

Abbiamo visto che

$$\int\limits_{\mathbf{R}^N} \frac{\partial u}{\partial x_j}\, v = -\int\limits_{\mathbf{R}^N} u\, \frac{\partial v}{\partial x_j} \qquad \forall u \in C^1, \quad \forall v \in C_0^\infty(\mathbf{R}^N)$$

Derivate deboli, lo spazio H^1_{loc}. Se $u \in L^1_{loc}(\mathbf{R}^N)$ (i.e. $\int\limits_{B_R} |u| < +\infty \ \forall R$) e

$$\exists \quad u_j \in L^1_{loc}(\mathbf{R}^N) : \qquad \int\limits_{\mathbf{R}^N} u_j\, v = -\int\limits_{\mathbf{R}^N} u\, \frac{\partial v}{\partial x_j} \qquad \forall v \in C_0^\infty(\mathbf{R}^N)$$

diremo che u_j é la derivata debole di u rispetto alla j-esima variabile e scriveremo $\frac{\partial u}{\partial x_j} = u_j$, $\nabla u := (\frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_N})$. Diremo anche che $u \in H^1_{loc}(\mathbf{R}^N)$.

Proposizione 1 (unicitá della derivata debole, regolarizzazione).

(i) $u_j, v_j \in L^1_{loc}(\mathbf{R}^N)$, $\int\limits_{\mathbf{R}^N} u_j\, v = -\int\limits_{\mathbf{R}^N} u\, \frac{\partial v}{\partial x_j} = \int\limits_{\mathbf{R}^N} v_j\, v \quad \forall v \in C_0^\infty(\mathbf{R}^N) \Rightarrow$ $u_j = v_j$. In particolare, ogni funzione C^1 ha derivate deboli e queste coincidono con le derivate usuali.

(ii) $\quad \varphi \in C_0^\infty,\ u \in H^1_{loc} \ \Rightarrow\ \varphi * u \in C^\infty$ e $\frac{\partial}{\partial x_j}(\varphi * u) = \varphi * \frac{\partial u}{\partial x_j}$

(iii) Se $u \in H^1_{loc}(\mathbf{R}^N)$ e $v \in C_0^\infty(\mathbf{R}^N)$ allora $uv \in H^1_{loc}(\mathbf{R}^N)$ e $\frac{\partial uv}{\partial x_j} = \frac{\partial u}{\partial x_j} v + u \frac{\partial v}{\partial x_j}$

Prova di (ii). $\quad u \in L^1_{loc} \ \Rightarrow\ \varphi * u \in C^\infty$ e $\frac{\partial}{\partial x_j}(\varphi * u) =$

$$\int_{\mathbf{R}^N} \frac{\partial}{\partial x_j}\varphi(x-y)\, u(y)\, dy = -\int_{\mathbf{R}^N} \frac{\partial}{\partial y_j}\varphi(x-y)\, u(y)\, dy = \int_{\mathbf{R}^N} \frac{\partial u}{\partial y_j}\varphi(x-y)\, dy = \varphi * \frac{\partial u}{\partial x_j}$$

Prova di (iii). $-\int_{\mathbf{R}^N} \frac{\partial u}{\partial x_j} v\varphi = \int_{\mathbf{R}^N} u \left[v \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} + \varphi \frac{\partial v}{\partial x_j}\right] \Rightarrow \int_{\mathbf{R}^N} uv \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} = -\int_{\mathbf{R}^N} \varphi \left[u \frac{\partial v}{\partial x_j} + v \frac{\partial u}{\partial x_j}\right]$ per ogni $\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^N)$.

Definizione di $H^{1,p}(\mathbf{R}^N)$. Sia $N, p \geq 1$. $H^{1,p}(\mathbf{R}^N)$ é lo spazio delle funzioni L^p con derivate deboli in L^p, dotato della norma

$$|||u|||_{1,p}^p = \int_{\mathbf{R}^N} |u|^p + |\nabla u|^p$$

La norma in $H^1(\mathbf{R}^N) := H^{1,2}(\mathbf{R}^N)$ deriva dal prodotto scalare

$$< u, v > = \int_{\mathbf{R}^N} < \nabla u, \nabla v > + u\, v$$

Proposizione 2 : C_0^∞ **é denso in** $H^{1,p}$.

Prova. $\forall u \in H^{1,p}$, $\exists u_n \in C_0^\infty(\mathbf{R}^N)$: $\quad u_n \to u, \quad \partial_j u_n \to \partial_j u \quad$ in $\quad L^p$. Infatti, sia $\psi_R(x) := \psi(\frac{x}{R})$, $\psi \in C_0^\infty(B_2)$, $0 \leq \varphi \leq 1$, $\psi \equiv 1$ in B_1 e $\varphi \in C_0^\infty$ nucleo regolarizzante. Posto $u_R := u\, \psi_R$, risulta

$$\varphi_\epsilon * u_R \in C_0^\infty, \quad \varphi_\epsilon * u_R \to_\epsilon u_R \quad \text{in} \quad L^p$$

$$\partial_j(\varphi_\epsilon * u_R) = \varphi_\epsilon * (\partial_j u_R) \in C_0^\infty, \quad \varphi_\epsilon * (\partial_j u_R) \to_\epsilon \partial_j u_R \quad \text{in} \quad L^p$$

Basta quindi provare che $u\, \psi_R \to_R u$ in $H^{1,p}$, ed infatti

$$\int |u - u\psi_R|^p + |\nabla(u - u\psi_R)|^p \leq \int_{|x| \geq R} |u|^p + |\nabla u|^p + |u|^p \left(\frac{1}{R}|\nabla \psi(\frac{x}{R})|\right)^p \to_{R \to +\infty} 0$$

Corollario 2 (Diseguaglianza di Sobolev in $H^1(\mathbf{R}^N)$ **).** Sia $p \in [2, \frac{2N}{N-2}]$. Allora

$$\left(\int_{\mathbf{R}^N} |u|^p\right)^{\frac{2}{p}} \leq c(N,p) \int_{\mathbf{R}^N} |\nabla u|^2 + u^2 \qquad \forall u \in H^1(\mathbf{R}^N)$$

Segue da: $u \in H^1(\mathbf{R}^N) \Rightarrow \exists\, u_n \in C_0^\infty$ tale che $u_n \to u$ in L^2 e q.o. e $\nabla u_n \to \nabla u$ in L^2 e dalla diseguaglianza di Sobolev per u_n, per cui

$$\left(\int_{\mathbf{R}^N} |u|^p\right)^{\frac{2}{p}} \leq \liminf_n \left(\int_{\mathbf{R}^N} |u_n|^p\right)^{\frac{2}{p}} \leq c(N,p) \lim \int_{\mathbf{R}^N} |\nabla u_n|^2 + u_n^2 = \int_{\mathbf{R}^N} |\nabla u|^2 + u^2$$

NOTA. (i) Stesso argomento di densitá mostra che é anche vero che esiste $S > 0$ tale che

$$\|u\|_{\frac{2N}{N-2}} \leq S\|\nabla u\|_2 \quad \forall u \in H^1$$

(ii) Allo stesso modo si estendono le diseguaglianze di Sobolev a funzioni $H^{1,p}$ nel caso $p \in (2,N))$ e Morrey, nel caso $p > N$.

Proposizione 3. H^1 **é spazio di Hilbert**

H^1 é completo: Sia u_n di Cauchy in H^1, ovvero u_n, $\partial_j u_n$ sono di Cauchy in L^2. Dunque esistono $u \in L^2$, $u_j \in L^2$ tali che $u_n \to u$ in L^2, $\partial_j u_n \to u_j$ in L^2. Ma

$$\int u \ \ \partial_j \varphi \ = \ \lim_n \int u_n \ \ \partial_j \varphi \ = \ -\lim_n \int \varphi \ \ \partial_j u_n \ = \ -\int \varphi \ \ v_j$$

Dunque u ha derivate deboli in L^2 date da $\partial_j u = u_j$, ovvero $u \in H^1$.

Teorema di Rellich (in H^1 **)** Sia $u_n \in H^1(\mathbf{R}^N)$ con $\sup_n \|\nabla u_n\|_2 < \infty$. Se $\exists R > 0 :\quad |x| \geq R \Rightarrow u_n(x) = 0$, allora u_n ha una sottosuccessione che converge in $L^2(\mathbf{R}^N)$.

Prova. Basta provare che se F é insieme limitato in H^1 e $u \equiv 0$ fuori di B_R per ogni $u \in F$, allora F é totalmente limitato in L^2, ovvero se, indicata con $B_\epsilon(v)$ la palla in L^2 di raggio ϵ e centro v,

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists p \ = \ p(\epsilon) \text{ e } v_1, \ldots, v_p \text{ in } L^2 \quad \text{ tali che } \quad F \subset \bigcup_{j=1}^{p} B_\epsilon(v_j)$$

Per densitá, per ogni $u \in F$ esiste $\phi_u \in C_0^\infty(B_{R+1})$ tale che $\|\nabla(u - \phi_u)\|_2 \leq \frac{\epsilon}{2}$. L'insieme $\{\phi_u :\ \ u \in F\}$ é evidentemente limitato in $H^1 \cap C_0^\infty$, e quindi, per il Teorema di Rellich, é totalmente limitato in L^2, ovvero esiste un numero finito di palle $B_{\frac{\epsilon}{2}}(v_j)$ in L^2 di raggio $\frac{\epsilon}{2}$ e centro v_j tali che $\{\phi_u :\ \ u \in F\} \subset \cup_j B_{\frac{\epsilon}{2}}(v_j)$. Siccome, se $u \in F$ e $\phi_u \in B_{\frac{\epsilon}{2}}(v_j)$ allora $u \in B_\epsilon(v_j)$ concludiamo che $F \subset \cup_{j=1}^p B_e(v_j)$.

NOTA É essenziale che le u siano supportate in una medesima palla .

Un'applicazione: I autovalore del Laplaciano in Ω aperto limitato in $\mathbf{R}^N$

Sia $\quad \lambda_1(\Omega) := \inf\{\int_{\mathbf{R}^N} |\nabla u|^2 : \quad u \in C_0^\infty(\Omega), \quad \int_{\mathbf{R}^N} |u|^2 = 1\}$. $\quad$ Allora

$$\exists u_1 \in H^1(\mathbf{R}^N), \quad u_1 \equiv 0 \ \ in \ \Omega^c : \quad \int_{\mathbf{R}^N} |u_1|^2 = 1 \quad e \quad \int_{\mathbf{R}^N} |\nabla u_1|^2 = \lambda_1(\Omega)$$

Per trovare u_1, costruiamo una successione minimizzante w_n:

$$w_n \in C_0^\infty(\Omega) : \qquad \int_{\mathbf{R}^N} |w_n|^2 = 1, \quad \int_{\mathbf{R}^N} |\nabla w_n|^2 \to \lambda_1$$

Siccome w_n é limitata in H^1, che é un Hilbert, possiamo supporre (eventualmente passando a una sottosuccessione) che esista $u \in H^1$ tale che $w_n \rightharpoonup u$ in H^1 ed anche in L^2, perché, per Riesz,

$$\forall f \in L^2, \ \exists g_f \in H^1 : \quad \int_{\mathbf{R}^N} wf = \int_{\mathbf{R}^N} \nabla w \nabla g_f + w g_f \qquad \forall w \in H^1$$

e quindi $\quad \int\limits_{\mathbf{R}^N} w_n f = \int\limits_{\mathbf{R}^N} \nabla w_n \nabla g_f + w_n g_f \to_n \int\limits_{\mathbf{R}^N} \nabla u \nabla g_f + u g_f = \int\limits_{\mathbf{R}^N} uf \quad \forall f \in L^2.$

D'altra parte. per Rellich, w_n ha una sottosuccessione convergente in L^2, dunque necessariamente convergente ad u, che é quindi l'u_1 cercato.

SOLUZIONI DEBOLI DELL'EQUAZIONE DI POISSON in $\mathbf{R}^N$

Sia $\quad \Delta = \sum\limits_{j=1}^{N} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \quad \Omega$ aperto di $\mathbf{R}^N$. $\quad$ Se , data f, $\quad u \in C^2(\Omega)$ é soluzione di

(equazione di Poisson) $\qquad\qquad -\Delta u = f \quad$ in $\quad \Omega$

allora, moltiplicando l'equazione per $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ ed integrando per parti, si ha

$$(\star) \qquad \int \nabla u \, \nabla \varphi \ = \int f \, \varphi \qquad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$$

$$(\star\star) \qquad -\int u \, \Delta \varphi \ = \int f \, \varphi \qquad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$$

Viceversa, se $u \in C^2(\Omega)$ e vale $(\star\star)$, allora u é soluzione dell'equazione di Poisson. Diremo che u é soluzione debole (molto debole) dell'equazione di Poisson in Ω se $u \in H^1_{loc}$ e soddisfa $(\star)$ (rispet.,$u \in L^1_{loc}$ e soddisfa $(\star\star)$).
Abbiamo visto che se $\Omega = \mathbf{R}^N$ e $f \in C_0^\infty(\mathbf{R}^N)$, $f * \mathcal{N}$ é una soluzione C^∞. Tale convoluzione dá sotto ipotesi molto piú deboli su f, una soluzione in senso debole.

Soluzioni deboli via convoluzione e regolaritá

Sia $N\geq 3$, $1<p<\frac{N}{2}$, $f\in L^p(\mathbf{R}^N)$, $\quad c(N):=N(N-2)\int\frac{d\xi}{(1+|\xi|^2)^{\frac{N+2}{2}}}$.

Allora, $\qquad f*\mathcal{N}$, $\mathcal{N}=\frac{G_{N-2}}{c(N)}\quad$ é soluzione debole dell'eq. di Poisson.

Infatti, sia $f_n\in C_0^\infty(\mathbf{R}^N)$, $f_n\to_n f$ in L^p , per cui, per (HLS),

$$\|f_n*\mathcal{N}\ -\ f*\mathcal{N}\|_{\frac{Np}{N-2p}}\to_n 0$$

Da $\quad -\Delta(f_n*\mathcal{N})=\ f_n$ segue allora

$$-\int[f*\mathcal{N}]\ \Delta\varphi=-\lim_n\int[f_n*\mathcal{N}]\ \Delta\varphi=\ \lim_n\int f_n\varphi=\ \int f\ \varphi\qquad\forall\varphi\in C_0^\infty$$

Osserviamo ora che, se $\quad -\int u\,\Delta\varphi=\ \int f\ \varphi,\quad \forall\varphi\in C_0^\infty(B_R)\quad$ allora

$$-\int[u-f*\mathcal{N}]\ \Delta\varphi=0\qquad\quad\forall\varphi\in C_0^\infty(B_R)$$

(si dice che $u-f*\mathcal{N}$ é 'debolmente armonica' in B_R). Ed allora u ha (almeno) la stessa regolaritá di $f*\mathcal{N}$, in virtú del

Lemma di Weil. $\quad$ Sia $\quad u\in L^1_{loc}(\Omega)\quad$ tale che

$$-\int_\Omega u\,\Delta\varphi\ =\ 0\qquad\qquad\forall\varphi\in C_0^\infty(\Omega).\qquad\qquad \text{Allora}\quad u\in C^\infty(\Omega)$$

Lemma (Regolaritá di $f*\mathcal{N}$). $\quad$ Sia $N\geq 3$, $1<p<\frac{N}{2}$, $f\in L^p(\mathbf{R}^N)$. Allora

$$f*\mathcal{N}\in L^{\frac{Np}{N-2p}},\quad \partial_j(f*\mathcal{N})=f*\partial_j\mathcal{N}\in L^{\frac{Np}{N-p}}$$

Prova. Sia dapprima $f\in C_0^\infty(\mathbf{R}^N)$. Dunque, se $|x|\leq r$, esiste $R>0$:

$$|\frac{f(x-z)}{|z|^{N-1}}|\leq\frac{\|f\|_\infty\,\chi_{B_R}(z)}{|z|^{N-1}}\qquad e\quad |\frac{\partial f}{\partial x_j}(x-z)\frac{1}{|z|^{N-2}}|\leq\frac{\|\frac{\partial f}{\partial x_j}\|_\infty\,\chi_{B_R}(z)}{|z|^{N-2}}$$

cioé $z\to\frac{f(x-z)}{|z|^{N-2}}$ e $z\to\frac{\partial f}{\partial x_j}(x-z)\frac{1}{|z|^{N-2}}$ sono equidominate (in x) e quindi si puó derivare sotto segno di integrale:

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(f*G_{N-2})=\int\frac{\partial f}{\partial x_j}(x-z)\frac{dz}{|z|^{N-2}}=-\int\frac{\partial f}{\partial z_j}(x-z)\frac{dz}{(|z|^2)^{\frac{N-2}{2}}}$$

Non si puó, senza usare cautela, integrare per parti. Tuttavia, per quanto sopra,

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(f*G_{N-2})=-\lim_{\epsilon\to 0}\int\frac{\partial f}{\partial z_j}(x-z)\frac{dz}{(\epsilon^2+|z|^2)^{\frac{N-2}{2}}}=$$

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int f(x-z)\frac{-(N-2)z_j}{(\epsilon^2+|z|^2)^{\frac{N}{2}}}\,dz = -(N-2)\int \frac{f(y)(x_j-y_j)}{|x-y|^N}dy = f*\frac{\partial G_{N-2}}{\partial x_j}$$

D'altra parte, se $f_n \in C_0^\infty, \quad \|f_n - f\|_p \to_n 0$, usando (HLS) vediamo che

$$\|\int \frac{[f_n(y)-f(y)](x_j-y_j)dy}{|x-y|^N}\|_{\frac{Np}{N-p}} \le c\,\|f_n-f\|_p \ \to_n 0$$

ovvero $\quad f_n * \partial_j\mathcal{N} \to_n f*\partial_j\mathcal{N} \quad$ in $\quad L^{\frac{Np}{N-p}} \quad$ e quindi $\quad -\int (f*\mathcal{N})\,\partial_j\varphi =$

$-\lim_n \int (f_n*\mathcal{N})\,\partial_j\varphi = \lim_n\int \partial_j(f_n*\mathcal{N})\,\varphi = \lim_n\int[f_n*\partial_j\mathcal{N}]\,\varphi = \int(f*\partial_j\mathcal{N})\,\varphi$

ovvero $\quad f*\partial_j\mathcal{N}\in L^{\frac{Np}{N-p}}$ sono le derivate deboli derivate deboli di $f*\mathcal{N}$.

Esempio: regolaritá delle autofunzioni del laplaciano.

Abbiamo visto che, se Ω é aperto limitato in $\mathbf{R}^N$, $N\ge 3$, e

$$\lambda_1(\Omega) := \inf_{u\in C_0^\infty(\Omega),\,u\neq 0}\frac{\int|\nabla u|^2}{\int u^2}, \qquad \text{allora} \qquad \lambda_1>0 \qquad \text{e}$$

$$\exists u_1\in H^1(\mathbf{R}^N), \quad u_1\equiv 0 \ \ in\ \ \Omega^c: \quad \int_{\mathbf{R}^N}|u_1|^2 = 1 \quad e \quad \int_{\mathbf{R}^N}|\nabla u_1|^2 = \lambda_1(\Omega)$$

É facile vedere che u_1 é autofunzione (in senso debole) del laplaciano, cioé

$$\int \nabla u_1\nabla\varphi = \lambda_1\int u_1\varphi \qquad \forall\varphi\in C_0^\infty(\Omega)$$

Piú in generale, supponiamo $u\in L^p$, u nulla fuori di Ω (e quindi $u\in L^r(\Omega)\quad \forall r\in(1,p]$) sia soluzione debole di

$$-\Delta u = \lambda u \qquad \text{ovvero} \qquad -\int u\,\Delta\varphi = \lambda\int u\,\varphi, \quad \forall\varphi\in C_0^\infty(B_R)$$

Proviamo che u é Holderiana. Sia $p=\frac{N}{q}$.

Se $0<q\le 1$, $u\in L^r\ \forall r<N$ e quindi $\nabla u\in L^{\frac{Nr}{N-r}}\ \forall r<N$ e quindi u é Holderiana (Teorema di Morrey).

Se $1<q\le 2$, da $u\in L^{\frac{N}{q}}$ segue che $\nabla u\in L^{\frac{N\frac{N}{q}}{N-\frac{N}{q}}} = L^{\frac{N}{q-1}}$. Siccome $q-1\le 1$, di nuovo Morrey dá l'Holderianitá di u.

Se $2<q\le 4$, $\nabla u\in L^{\frac{N\frac{N}{q}}{N-\frac{N}{q}}} = L^{\frac{N}{q-1}}$. Siccome $q>2$, Sobolev dá $u\in L^{\frac{N}{q-2}}$ e ritroviamo le situazioni precedenti ($0<q-2\le 2$), e quindi u é holderiana.

Se $4<q\le 6$, come sopra troviamo che $u\in L^{\frac{N}{q-2}}$ ove ora $2<q-2\le 4$ e quindi u é

holderiana. Iterando la procedura, troviamo che u é holderiana quale che sia q.
Se la u ha derivate deboli sommabili in Ω, allora, se $U_j := \partial_j u$, allora

$$\lambda \int (\partial_j u)\, \varphi = -\lambda \int u\, \partial_j \varphi = \int u \Delta(\partial_j \varphi) = \int u \partial_j(\Delta\varphi) = -\int (\partial_j u)\Delta\varphi$$

Anche per le derivate deboli $\partial_j u$ vale quanto sopra: sono holderiane.
Con un pó pií di lavoro si vede che $u \in C^\infty(\Omega)$.

Soluzioni deboli del problema di Dirichlet in aperti limitati.

Il problema di Dirichlet per l'equazione di Laplace consiste nel trovare la soluzione (unica !) dell'equazione $-\Delta u = f$ in un aperto Ω, che coincida sul bordo di Ω con una data funzione g. Consideriamo qui il caso $g \equiv 0$:

$$-\Delta u = f \quad in \quad \Omega, \qquad u = 0 \quad su \quad \partial\Omega$$

TEOREMA . Sia $\Omega \subset \mathbf{R}^N, N \geq 3$ aperto limitato, $f \in L^{\frac{2N}{N+2}}(\Omega)$. Allora

$$\exists\, !\, u_f \in H^1(\mathbf{R}^N), \quad u(x) = 0 \;\; se \;\; x \notin \Omega : \qquad \int \nabla u_f\, \nabla\varphi \;=\; \int f\, \varphi \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$$

e (dipendenza continua dal dato) $\qquad (\int |\nabla u_f|^2)^{\frac{1}{2}} \leq c(N)\|f\|_{\frac{2N}{N+2}}$

Prova. Possiamo pensare che f sia in $L^{\frac{2N}{N+2}}(\mathbf{R}^N)$, $f \equiv 0$ fuori di Ω. Sia

$$E(u) = \frac{1}{2}\int |\nabla u|^2 - \int f\, u, \quad u \in H^1$$

Osserviamo innanzi tutto che

$$\inf_{u \in C_0^\infty(\Omega)} E(u) > -\infty$$

perché $u_j \in C_0^\infty(\Omega), \|\nabla u_j\| \to \infty \overset{Poincare}{\Rightarrow} E(u_j) \geq \frac{1}{2}\|\nabla u_j\|_2^2 - c(N)\|f\|_{\frac{2N}{N+2}}\|\nabla u_j\|_2 \to +\infty$. Ma allora $u_n \in C_0^\infty(\Omega)$, $E(u_n) \to_n \inf_{u \in C_0^\infty(\Omega)} E(u) \quad \Rightarrow$
$\Rightarrow \quad \sup_n \|\nabla u_n\|_2 < +\infty \quad \Rightarrow \quad \exists \underline{u}, \quad \exists n_k : \quad u_{n_k} \rightharpoonup_k \underline{u}$ in H^1. Inoltre, usando Rellich, possiamo supporre anche che u_{n_k} converga ad $\underline{u}$ in L^2 e q.o. . Infine, siccome la norma é debolmente inferiormente semicontinua, cioé $\liminf \int |\nabla u_{n_k}|^2 + |u_{n_k}|^2 \geq \int |\nabla \underline{u}|^2 + \underline{u}^2$ e quindi anche $\liminf \int |\nabla u_{n_k}|^2 \geq \int |\nabla \underline{u}|^2$. Dunque $E(\underline{u}) = \inf E$ e quindi

$$0 = \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\int |\nabla(\underline{u} + t\varphi)|^2 - \int f\, \underline{(}u + t\varphi)\right]_{|t=0} = \int \nabla u\, \nabla\varphi - \int h\varphi \quad \forall \varphi \in C_0^\infty$$

ovvero $\underline{u}$ é soluzione debole.