AM310 2012: Tracce delle lezioni- 9

Effetto regolarizzante della convoluzione

Sia $\int_{\mathbf{R}^n} |f| < \infty$.   Allora

(i) $g \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n) \Rightarrow f * g \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$, $\frac{\partial}{\partial x_j}(f * g) = f * \frac{\partial g}{\partial x_j}$

(ii) $\mathrm{supp}(f * g) \subset \mathrm{supp}\ f + \mathrm{supp}\ g$ ($\mathrm{supp}\ f :=$ chiusura di $\{x : f(x) \neq 0\}$)

Basta mostrare, usando Lebesgue, che é lecita la derivazione sotto segno di integrale.

Nuclei regolarizzanti.

Sia $0 \leq \varphi$ sommabile in $\mathbf{R}^n$ tale che $\int_{\mathbf{R}^n} \varphi = 1$. Sia $\varphi_\epsilon(x) ::= \epsilon^{-n}\varphi(\frac{x}{\epsilon})$. Allora

$$\int |\varphi_\epsilon * f - f|^p \to_{\epsilon \to 0} 0 \quad \forall f \in L^p(\mathbf{R}^n)$$

Segue da $\int_{\mathbf{R}^n} |\varphi_\epsilon * f - f|^p(x)\,dx = \int |\int [f(x) - f(x-y)](\varphi_\epsilon(y))^{\frac{1}{p}} (\varphi_\epsilon(y))^{\frac{1}{q}}\,dy|^p\,dx$

$$\leq \int \left(\int |f(x) - f(x-y)|^p \varphi_\epsilon(y) dy\right)\left(\int |\varphi_\epsilon(y)| dy\right) dx =$$

$$\int \left(\varphi(z) \int |f(x) - f(x - \epsilon z)|^p dx\right) dz \to_{\epsilon \to 0} 0 \quad \text{(convergenza dominata)}$$

Approssimazione mediante convoluzione. Siccome $f * \varphi_\epsilon \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$, abbiamo ottenuto che

ogni f sommabile é limite in media di funzioni C^∞
In effetti ogni f sommabile é limite in media di funzioni C_0^∞

Basta infatti prendere $f\,\chi_{B_{\frac{1}{\epsilon}}} * \varphi_\epsilon$:

$$\int |f\,\chi_{B_{\frac{1}{\epsilon}}} * \varphi_\epsilon - f| \leq \int |(f\,\chi_{B_{\frac{1}{\epsilon}}} - f) * \varphi_\epsilon| + \int |f * \varphi_\epsilon - f| \to 0$$

perché $\int |f - f\,\chi_{B_{\frac{1}{\epsilon}}}| = \int_{|x| \geq \frac{1}{\epsilon}} |f| \to 0$ al tendere di ϵ a zero.

COMPATTEZZA IN $L^p(\mathbf{R}^N)$: IL TEOREMA DI FRECHET- KOLMOGOROV

Sia $p \geq 1$. Non é in generale vero che una successione limitata in $L^p(\mathbf{R}^N)$ ammette sottosuccessioni convergenti in L^p. Cioé, non é vero in generale che

$$f_n \in L^p(\mathbf{R}^N), \ \sup_n \|f_n\|_{L^p} < +\infty \quad \Rightarrow \quad \exists f_{n_k} \quad \text{convergente in} \quad L^p$$

Ad esempio, se $f \in C_0^\infty(\mathbf{R}^N)$ e $f_n(x) := f_n(x+h_n)$, $|h_n| \to_n +\infty$, allora $f_n(x) \to_n 0 \quad \forall x \in \mathbf{R}^N$ ma f_n non ha estratte convergenti (necessariamente a zero) in L^p perché $\|f_n\|_p \equiv \|f\|_p$. Analogamente , $f_n(x) := \epsilon_n^{\frac{N}{p}} f(\epsilon_n x)$, $\epsilon_n \to_n 0$ ha norma L^p costante e quindi non ha estratte convergenti a $f \equiv 0$ che é il limite puntuale delle f_n.

Al fine di individuare delle condizioni che assicurino la compattezza di f_n in L^p, cominciamo con l'osservare che

$$\int |f_n - f|^p \to_n 0 \quad \Rightarrow \quad \sup_n \int |f_n|^p < +\infty \quad \text{e}$$

$$\sup_n \int |f_n(x+h) - f_n(x)|^p dx \to_{|h|\to 0} 0 \qquad\qquad \sup_n \int_{|x|\geq r} |f_n|^p \to_{r\to+\infty} 0$$

La validitá di tali proprietá per ciascuna f_n é ben nota: il fatto che tali proprietá valgano uniformemente in n é facile conseguenza della convergenza L^p delle f_n. É sotto tali condizioni che una data f_n ha una estratta convergente in L^p.

Teorema (Frechet-Kolmogorov) . Sia $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ aperto. Siano f_n misurabili in $L^p(\mathbf{R}^N)$ e tali che

(i) $\forall K \subset \Omega$ compatto $\exists c(K):$ $\qquad \sup_n \int_K |f_n|^p \leq c(K)$

(ii) $\forall K \subset \Omega$ compatto $\qquad \sup_n \int_K |f_n(x+h) - f_n(x)|^p dx \to_{|h|\to 0} 0$

Allora esistono f ed f_{n_k} tali che $\int_K |f_{n_k} - f|^p \to_k 0 \quad \forall \quad \forall K \subset \Omega$ compatto .
Se di piú

(iii) $\forall \epsilon > 0$, $\exists\ K_\epsilon \subset \Omega$ compatto e tale che $\qquad \sup_n \int_{\Omega\setminus K_\epsilon} |f_n|^p \leq \epsilon$

allora f_n ha una sottosuccessione convergente in $L^p(\Omega)$.

Prova. Sia, per semplicitá, $p = 1$. Nel seguito supporremo, come é lecito, che $f_n \equiv 0$ fuori di Ω. Il seguente Lemma descrive il ruolo delle ipotesi (i)-(ii).

Lemma . Sia $\varphi \in C_0^\infty(B_1),\ 0 \le \varphi \le 1,\ \int\limits_{\mathbf{R}^N} \varphi = 1,\ \ \varphi_\epsilon = \epsilon^{-N}\varphi(\frac{x}{\epsilon})$. Sia $K \subset \Omega$ compatto, $\epsilon < dist(K, \partial\Omega)$. Allora

$$(i) \quad \Rightarrow \quad \exists c = c_e : \ \sup_{x\in K} |(f_n * \varphi_\epsilon)(x)| + \sum_{j=1}^{N} \left[\sup_{x\in K} |\frac{\partial}{\partial x_j}(\varphi_\epsilon * f_n)(x)| \right] \le c_\epsilon \quad \forall n$$

$$(ii) \quad \Rightarrow \quad \sup_n \int\limits_K |f_n - (\varphi_\epsilon * f_n)| \to_{\epsilon\to 0} 0$$

Prova del Lemma.

Sia $K^\epsilon := \{z = x + y : \ \ x \in K, \ \ |y| \le \epsilon\}$. Da $c(K^\epsilon) := \ \sup\limits_n \int\limits_{K^\epsilon} |f_n| < +\infty$ segue

$$|(\varphi_\epsilon * f_n)(x)| \ \le \|\varphi_\epsilon\|_\infty \int\limits_{|y|\le\epsilon} |f_n(x-y)|\,dy \ \le c(K^\epsilon)\,\|\varphi_\epsilon\|_\infty \qquad \forall x \in K$$

$$|\frac{\partial}{\partial x_j}(\varphi * f_n)(x)| \ = \left| \int\limits_{\mathbf{R}^N} f_n(y)\,\frac{\partial}{\partial x_j}\varphi_\epsilon(x-y)\,dy \right| \le \ c(K^\epsilon)\,\|\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\|_\infty \quad \forall x \in K$$

Poi, $\sup_n \int\limits_K |f_n(x+h) - f_n(x)|\,dx \to_{|h|\to 0} 0 \quad \Rightarrow$

$$\int_K |f_n(x) - (\varphi_\epsilon * f_n)(x)| \le \int_K \left(\int_{\mathbf{R}^N} |f_n(x-y) - f_n(x)| \varphi_\epsilon(x)\,dy \right) dx =$$

$$\int_K \left(\int_{\mathbf{R}^N} |f_n(x-\epsilon z) - f_n(x)| \varphi(z)\,dz \right)\,dx \ =$$

$$= \int_{|z|\le 1} \left(\varphi(z) \ \int_K |f_n(x-\epsilon z) - f_n(x)|\,dx \right)\,dz \to_{\epsilon\to 0} 0$$

PROVA di F-K.

Sia $\Omega_h,\ h \in \mathbf{N}$ famiglia crescente di sottoinsiemi aperti limitati di Ω tali che

$$K_h := \overline{\Omega}_h \subset \Omega, \quad dist(K_h, \partial\Omega) \ > \frac{1}{h}, \quad \cup_h \Omega_h = \Omega$$

Proviamo che

$$\exists n_k : \quad \int\limits_{K_h} |f_{n_k} - f_{n_h}| \ \le \ \frac{1}{h} \qquad \forall k \ge h$$

Dalla seconda parte del Lemma segue che

$$\forall h,\ \exists \epsilon_h < \frac{1}{h} : \qquad \sup_n \int_{K_h} |f_n - (\varphi_h * f_n)| \le \frac{1}{h} \qquad (\varphi_h := \varphi_{\epsilon_h})$$

Dalla prima parte del Lemma segue che, per ogni ϵ, la successione $n \to \varphi_\epsilon * f_n$ soddisfa le ipotesi del Teorema di Ascoli-Arzela su ogni compatto K in Ω tale che $dist(K, \partial\Omega) > \epsilon$. Esiste quindi una selezione di indici n_j^1 tale che $\varphi_1 * f_{n_j^1}$ converge uniformemente (e quindi in media) in K_1. Possiamo quindi supporre che

$$\int_{K_1} |\varphi_1 * f_{n_i^1} - \varphi_1 * f_{n_j^1}| \le 1 \qquad \forall i, j$$

Per la stessa ragione, esiste una (ulteriore) selezione di indici $(n_j^2) \subset (n_j^1)$ tale che

$$\int_{K_2} |\varphi_2 * f_{n_i^2} - \varphi_2 * f_{n_j^2}| \le \frac{1}{2} \qquad \forall i, j$$

Iterando, troviamo, al passo h una (ulteriore) selezione di indici $(n_j^h) \subset (n_j^{h-1})$ tali che

$$\int_{K_h} |\varphi_h * f_{n_i^h} - \varphi_h * f_{n_j^h}| \le \frac{1}{h} \quad \forall i, j$$

Ma allora, indicata $n_h := n_h^h$, troviamo che

$$k \ge h \quad \Rightarrow \quad \int_{K_h} |f_{n_k} - f_{n_h}| \le$$

$$\le \int_{K_h} |f_{n_k} - \varphi_h * f_{n_k}| + \int_{K_h} |\varphi_h * f_{n_k} - \varphi_h * f_{n_h}| + \int_{K_h} |\varphi_h * f_{n_h} - f_{n_h}| \le \frac{3}{h}$$

Siccome, fissato $K \subset \Omega$ compatto, $K \subset K_h$ per h grande, si ha che f_{n_k} é di Cauchy in $L^1(K)$ e quindi esiste f misurabile in Ω tale che $\int_K |f_{n_k} - f| \to_k 0$.

Per provare la seconda parte del teorema basta osservare che

$$\exists K_\epsilon : \qquad \int_{\Omega \setminus K_\epsilon} |f| \le \liminf_j \int_{\Omega \setminus K_\epsilon} |f_{n_j}| \le \epsilon \qquad \Rightarrow$$

$$\limsup_j \int_\Omega |f_{n_j} - f| \le \limsup_j \int_{K_\epsilon} |f_{n_j} - f| + \limsup_j \int_{\Omega \setminus K_\epsilon} |f_{n_j} - f| \le 2\,\epsilon$$

AM5: Esercizi e Problemi- 9

Problema 1. Sia $0 \le \varphi$ sommabile in $\mathbf{R}^n$ tale che $\int_{\mathbf{R}^n} \varphi = 1$. Sia $\varphi_\epsilon(x) := \epsilon^{-n}\varphi(\frac{x}{\epsilon})$. Allora

$$\int_{B_R} |\varphi_\epsilon * f - f\,|^p \to_{\epsilon\to 0} 0 \quad \forall f \in L^p_{loc}(\mathbf{R}^n), \quad \forall R > 0$$

ove $f \in L^p_{loc} \quad \Leftrightarrow \quad \int_{|x|\le R} |f|^p < +\infty \quad \forall R > 0$.

Problema 2. Sia f continua in $\mathbf{R}^n$, $\varphi \in C_0^\infty$. Provare che

(i) $f * \varphi(x) := \int_{\mathbf{R}^n} f(x-y)\varphi(y)dy$ é definita in tutto $\mathbf{R}^n$ ed é una funzione C^∞.

(ii) $f * \varphi_\epsilon$ converge uniformemente sui compatti ad f.

Problema 3. Sia f sommabile in $\mathbf{R}^n$. Provare che

$$\int |f(x) - \frac{1}{L^n(B_r)} \int_{B_r(x)} f(y)dy\,|\,dx \to_{r\to 0} 0$$

Problema 4 Sia $f \in C(\mathbf{R}^N)$. Provare che

$$f(x) \to_{|x|\to+\infty} 0 \quad \Leftrightarrow \quad \exists f_n \in C_0^\infty(\mathbf{R}^N): \quad \sup_{x\in\mathbf{R}^N} |f_n(x) - f(x)| \to_{n\to+\infty} 0$$

Esercizio 1. Sia $\alpha \in [0,1)$. Sia $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}\chi_{(0,1]}$.

Provare che $f * f$ é continua sse $\alpha < \frac{1}{2}$.

Esercizio 2. Sia f sommabile in $\mathbf{R}^n$. Posto $f_n = f\,\chi_{\{|f(x)|\le n\}}$, provare che

$$\int |g| < +\infty \quad \Rightarrow \quad \int |f_n * g - f * g| \to_n 0$$

Esercizio 3. Stabilire se é vero che

$$f \in C(\mathbf{R}^n),\ \varphi \in C_0^\infty \quad \Rightarrow \quad x \to \int_{\mathbf{R}^n} f(x-y)\, g(y)dy \qquad \text{é sommabile}$$

AM5: Esercizi e Problemi- 8

CENNI DI SOLUZIONE

Problema 2. Sia $supp\ \varphi \subset B_1$, $|x| \le R$. Allora

$$|(\varphi_\epsilon * f)(x) - f(x)| \le \int |f(x) - f(x-y)|\varphi_\epsilon(y)\,dy =$$

$$\int (\varphi(z)|f(x) - f(x-\epsilon z)|dz) \le$$

$$\le \sup_{x,y\in B_{R+1},\ |x-y|\le\epsilon} |f(x) - f(y)| \to_{\epsilon\to 0} 0$$

per la uniforme continuitá di f in B_{R+1}.

Problema 3. $\int |f(x) - \frac{1}{volB_r}\int_{B_r(x)} f(y)dy|dx\ | \le$

$$\le \frac{1}{r^N volB_1}\int \left(\int |f(x) - f(y)|\chi_{B_r(x)}(y)\,dy\right)dx =$$

$$\frac{1}{r^N volB_1}\int\left(\int |\ f(x) - f(x-z))|\ \chi_{B_1}(\frac{z}{r})\,dz\right)dx =$$

$$= \frac{1}{r^N volB_1}\int\left(\int |f(x) - f(x-r\xi)|\ \chi_{B_1}(\xi)\,r^N\,d\xi\right)dx =$$

$$= \frac{1}{volB_1}\int\left(\chi_{B_1}(\xi)\int |\ f(x) - f(x-r\xi)\ |dx\right)d\xi \to_{r\to 0} 0$$

perché $\int |f(x) - f(x-r\xi)|dx \to_{r\to 0} 0$ e c ' é equidominatezza:

$$\chi_{B_1}(\xi)\int |f(x) - f(x-r\xi)|dx \le 2\|f\|_{L^1}\ \chi_{B_1}(\xi)$$

Problema 4.

$f \in C(\mathbf{R}^N)$, $f(x) \to_{|x|\to+\infty} 0 \quad\Rightarrow\quad f$ é uniformemente continua su tutto $\mathbf{R}^N$

e quindi, esattamente come nel Problema 2 si vede che ora

$$\sup_{\mathbf{R}^N} |(\varphi_\epsilon * f)(x)| \to_{\epsilon\to 0} 0$$

Sia ora $\chi_n := \chi_{|x|\le n}$. É

$\varphi_\epsilon * (f\chi_n) \in C_0^\infty(\mathbf{R}^N)$ e $|(\varphi_{\frac{1}{n}} * (f(\chi_n - 1))(x)| \le \sup_{|y|\ge n} |f(y)| \le \epsilon$ se $n \ge n_\epsilon$

e quindi, per $n \geq n_\epsilon$, si ha

$$|(\varphi_{\frac{1}{n}} * (f\chi_n))(x) - f(x)| \leq |(\varphi_{\frac{1}{n}} * (f(\chi_n - 1))(x)| + |(\varphi_{\frac{1}{n}} * f)(x) - f(x)| \, leq\epsilon \quad \forall x \in \mathbf{R}^N$$

Il viceversa é ovvio:

$$\sup_{\mathbf{R}^N} |f(x) - f_{n_\epsilon}(x)| \leq \epsilon, \quad supp \quad f_{n_\epsilon} \subset B_{R_\epsilon}, \quad |x| \geq R_\epsilon \quad \Rightarrow$$

$$|f(x)| \leq |f(x) - f_{n_\epsilon}(x)| + |f_{n_\epsilon}(x)| \leq \epsilon$$

Esercizio 1. Se $\alpha < \frac{1}{2}$ allora $f \in L^2$ e quindi $f * f$ é continua:

$$|(f*f)(x+h) - (f*f)(x)| \leq \int |f(x+h-y) - f(x-y)| \, |f(y)| \, dy \ \leq$$

$$\leq \ \|f\|_2 \left(\int |f(x+h-y) - f(x-y)|^2 dy \right)^{\frac{1}{2}} \to_{h \to 0} 0$$

Per discutere il caso $\alpha \geq \frac{1}{2}$, calcoliamo esplicitamente $f * f$.

$$x \leq 0 \quad \Rightarrow \quad \chi_{(0,1]}(y) \, \chi_{(0,1]}(x-y) = \chi_{(0,1] \cap [x-1,x)}(y) \equiv 0 \quad \Rightarrow \quad (f*f)(x) = 0$$

$$0 < x \leq 1 \quad \Rightarrow \quad (f*f)(x) = \int_0^x \frac{dy}{(x-y)^\alpha y^\alpha} = \frac{1}{x^{2\alpha}} \int_0^x \frac{dy}{(1-\frac{y}{x})^\alpha \, (\frac{y}{x})^\alpha} =$$

$$= \frac{1}{x^{2\alpha-1}} \int_0^1 \frac{dt}{(1-t)^\alpha \, t^\alpha} \to_{x \to 0^+} +\infty \quad \text{se} \quad \alpha > \frac{1}{2}$$

mentre

$$0 < x \leq 1 \quad \Rightarrow \quad (f*f)(x) = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)}} \quad \text{se} \quad \alpha = \frac{1}{2}$$

Dunque $f * f$ é discontinua in $x = 0$ se $\alpha \geq \frac{1}{2}$. Questo é in effetti l'unico punto di discontinuitá:

$$x \geq 1 \quad \Rightarrow \quad (f*f)(x) = \frac{1}{x^{2\alpha-1}} \int_{1-\frac{1}{x}}^{1} \frac{dt}{(1-t)^\alpha \, t^\alpha}$$

che é evidentemente continua.