AM310 2012: Tracce delle lezioni- 6

LO SPAZIO L^∞: DUALITÁ E COMPATTEZZA DEBOLE*

Sia μ misura su X. $\quad L^\infty = L^\infty(X,\Sigma,\mu) :=$

$\{f| \quad f \quad$ é misurabile ed esiste $\quad c>0: \quad |f(x)|\le c \quad$ quasi per ogni $\quad x\}$

e $\quad \|f\|_\infty := \inf\{c\ge 0: \quad |f(x)|\le c \quad \text{q.o.} \quad x\} =$

$= \|f\|_\infty := \min\{c\ge 0: \quad |f(x)|\le c \quad \text{q.o.} \quad x\}$, $\quad$ perché

$$\mu(\{x:\ |f(x)| \ > \ \|f\|_\infty\}) \ = \ \mu\Big(\cup_n \{x:\ |f(x)| \ > \ \|f\|_\infty + \frac{1}{n}\}\Big) = 0$$

É facile vedere che $\quad (L^\infty, \|.\|_\infty)$ **é un Banach.** Vogliamo provare che

$(L^1)' = L^\infty$: $\quad$ *se μ é σ-finita, allora* $(L^1)'$ **é isometricamente isomorfo a** L^∞

TEOREMA DELLA MEDIA. *Sia μ misura σ-finita. Sia $g\in L^1$. Allora*

$$m \le \frac{1}{\mu(E)}\int_E g \le M \quad \forall E\in\Sigma \quad \textit{con} \quad 0<\mu(E)<+\infty \quad \Rightarrow \quad m\le g\le M \quad \textit{q.o.}$$

Prova. Sia $\mu(E)<\infty$, $E_n=\{x\in E:\ g(x)\ge M+\frac{1}{n}\}$. É $\mu(E_n)=0$, perché, altrimenti,

$$M\mu(E_n) \ge \int_{E_n} g \ge (M+\frac{1}{n})\mu(E_n)$$

Dunque $\quad \mu(\{x\in E:\ g(x)>M\}) = \mu(\cup_n\{x\in E: g(x)\ge M+\frac{1}{n}\})=0.$
Se poi $X=\cup_j E_j$, $\ \mu(E_j)<\infty$, $E_j\subset E_{j+1}$, troviamo

$$\mu(\{x:\ g(x)>M\}) = \lim_j \mu(\{x\in E_j:\ g(x)>M\}) = 0$$

Ugualmente $\mu(\{x: g(x)<m\})=0$.

NOTA 1. Lo stesso vale se $g\in L^\infty$. Infatti, per quanto sopra, $m\le g\le M$ q.o. su ogni insieme di misura finita. Dunque, se $X=\cup_j E_j$, $E_i\cap E_j=\emptyset$ se $i\ne j$, $\mu(E_j)<+\infty$, allora $m\le g\le M$ in E_j e quindi $m\le g\le M$ in $X=\cup_j E_j$.

NOTA 2. L'ipotesi 'μ é σ-finita é essenziale. Ad esempio, se $X=\{1,\infty\}$, $\quad \mu(\{1\})=1, \mu(\{\infty\})=\infty$ e $f(1)=1, f(\infty)=+\infty$, f ha un'unica media, pari a 1, e quindi, se valesse il Teorema della media, sarebbe $\mu(\{x: f(x)\ne 1\})=0$, mentre $\mu(\{x: f(x)\ne 1\})=\infty$.

Prova del Teorema di isomorfismo. Data $g \in L^\infty$, sia

$T(g) := l_g, \qquad l_g(f) = \int fg \quad \forall f \in L^1. \qquad$ É $\quad |l_g(f)| = |\int fg| \leq \|f\|_1 \|g\|_\infty$

Dunque l_g é un funzionale lineare e continuo su L^1 con

$$\|l_g\| \leq \|g\|_\infty$$

T **é isometria** (chiaramente lineare). Si tratta di provare che $\|l_g\| \geq \|g\|_\infty$. É

$$\left| \frac{1}{\mu(E)} \int_E g \right| = \frac{l_g(\chi_E)}{\mu(E)} \leq \|l_g\|$$

e quindi, per il Teorema della Media, $\|g\|_\infty \leq \|l_g\|$.

T **é suriettiva.** Sia $X = \cup_j E_j$, $E_i \cap E_j = \emptyset$, $\mu(E_j) < +\infty$. Dato $l \in (L^1)'$, sia $l_j(f) := l(f\chi_{E_j})$. Da

$$|l_j(f)| \leq \|l\| \, \|f\chi_{E_j}\|_1 \leq \|l\| \sqrt{\mu(E_j)} \, \|f\|_2 \qquad \forall f \in L^2$$

segue che l_j é lineare e continuo su L^2 e quindi

$$\exists g_j \in L^2 : \qquad l(f\chi_{E_j}) = l_j(f) = \int f \, g_j \qquad \forall f \in L^2$$

Allora, presa $f = \chi_{E_i} \, sign \, g_j$, si ha che, se $i \neq j$, $0 = l(\chi_{E_i} \, sign \, g_j \, \chi_{E_j}) = \int_{E_i} |g_j|$ e quindi $g_j = 0$ q.o. in E_j^c. In particolare $g_j \in L^1$ e quindi, dal teorema della media e

$$\left| \frac{1}{\mu(E)} \int_E g_j \right| = \frac{l(\chi_{E \cap E_j})}{\mu(E)} \leq \|l\|$$

segue che $g_j \in L^\infty$. Ora, se $f \in L^1$, allora $f_{|E_j}$ é approssimabile in $L^1(E_j)$ mediante funzioni L^2 e quindi, dalla limitatezza di g_j e dalla continuitá di l segue che

$$l(f\chi_{E_j}) = l_j(f) = \int fg_j \qquad \forall f \in L^1$$

Infine, siccome $\sum_{j=1}^n f\chi_{E_j}$ converge a f in L^1, dalla continuitá di l segue che

$$l(f) = \sum_j l(f\chi_{E_j}) = \sum \int fg_j = \int f(\sum_j g_j)$$

ove $\| \sum_j g_j\|_\infty \leq \|l\|$.

Il duale di L^∞ non é L^1

Data $g \in L^1(X,\mu)$, *sia* $l_g(f) := \int_X fg d\mu$, $f \in L^\infty$. $L(g) := l_g$ *é* **isometria lineare** *di* L^1 *in* $(L^\infty)'$, *ma* **non** *é, in generale,* **suriettiva**.

Da $|l_g(f)| \le \|g\|_1 \ \|f\|_\infty$, segue che $l_g \in (L^\infty)'$ e $\|Lg\|_\infty \le \|g\|_1$: L é operatore lineare continuo di L^1 in $(L^\infty)'$. Di piú, presa $f = sign \ g$, $\|l_g\| \ge \int |g|$.
Controesempio. Se

$$l(\varphi) := \varphi(0) \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^N)$$

l é funzionale lineare continuo su C_0^∞, e, per il Teorema di Hahn-Banach, l ha un prolungamento lineare e continuo su tutto L^∞, che indichiamo ancora con l. Se esistesse $g \in L^1$ tale che $l(f) = \int gf$, $\forall f \in L^\infty$ sarebbe

$$\varphi(0) \quad = \quad \int g(x)\varphi(nx)dx \to_n 0 \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^N) \quad ; \quad \text{contraddizione se } \varphi(0) \ne 0.$$

Convergenza debole in L^1. Siano $f_n \in L^1$.

$$f_n \rightharpoonup f \quad \text{in} \quad L^1 \quad \Leftrightarrow \quad \int (f_n - f)h \to 0 \quad \forall h \in L^\infty$$

Convergenza debole in L^∞. Siano $f_n \in L^\infty$.

$$f_n \rightharpoonup f \quad \text{in} \quad L^\infty \quad \Leftrightarrow \quad l(f_n) \to l(f) \quad \forall l \in (L^\infty)'$$

Convergenza debole* in L^∞. Siano $f_n \in L^\infty$.

$$f_n \rightharpoonup^* f \quad \text{in} \quad L^\infty \quad \Leftrightarrow \quad \int f_n \, h \to \int f \, h \quad \forall h \in L^1$$

NOTA. Diversamente da quanto accade in $L^p, p \in (1, +\infty)$, **successioni limitate in L^1 o in L^∞ non hanno, in generale, estratte debolmente convergenti**.

(i) Sia $f \in C_0^\infty(\mathbf{R}^N)$, $f \ge 0$, $\int f = 1$, $f_n(x) := n^N f(nx)$. É $\int\limits_{\mathbf{R}^N} |f_n| dx = \int\limits_{\mathbf{R}^N} |f|$.
Supponiamo che esistano $\hat f \in L^1$ ed f_{n_k} tali che $\int f_{n_k} g \to \int \hat f g$ $\forall g \in L^\infty$. Quindi

$$\int \hat f g = \lim_k \int\limits_{\mathbf{R}^N} f_{n_k}(x) g(x) dx \ = \ \lim_k \int\limits_{\mathbf{R}^N} f(y) \ g(\frac{y}{n_k}) dy = g(0) \qquad \forall g \in C_0(\mathbf{R}^N)$$

e quindi $g(0) = \int\limits_{\mathbf{R}^N} \hat f(x) g(jx) dx \to_j 0$ che é assurdo se $g(0) \ne 0$.
Notiamo che se $p > 1$ e $f \in C_0^\infty(\mathbf{R}^N)$, $f \ge 0$, $\int f = 1$, $f_n(x) := n^{\frac{N}{p}} f(nx)$, é ora $\int\limits_{\mathbf{R}^N} |f_n|^p dx = \int\limits_{\mathbf{R}^N} |f|$, ma $f_n \rightharpoonup 0$ in L^p, perché $|\int\limits_{\mathbf{R}^N} n^{\frac{N}{p}} f(nx)\varphi(x) dx| \le$

$\|\varphi\|_\infty n^{\frac{N}{p}-N} \int\limits_{\mathbf{R}^N} |f(y)|dy \to 0 \ \forall\varphi \in C_0(\mathbf{R}^N)$. Siccome, come vedremo, $C_0(\mathbf{R}^N)$ é denso in $L^p(\mathbf{R}^N)$, concludiamo che $\int\limits_{\mathbf{R}^N} n^{\frac{N}{p}} f(nx)\varphi(x)dx \to 0 \ \forall\varphi \in L^p$.

(ii) Siano $f_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(nt), \quad t \in [-\pi,\pi]$. Tali funzioni formano un sistema ortonormale in $L^2([-\pi,\pi]$ e quindi convergono debolmente a zero in L^2. Di piú, si ha

Lemma (Riemann-Lebesgue) $\quad f_n \rightharpoonup^* 0$ in $L^\infty([-\pi,\pi])$, ovvero

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin(nt)\, g(t)dt \to_n 0 \qquad \forall g \in L^1([-\pi,\pi])$$

Ció deriva dal fatto che i polinomi trigonometrici sono densi in $C_{2\pi}$ e quindi in $C_0((-\pi,\pi))$ che é a sua volta denso in $L^1([-\pi,\pi])$ e dal fatto che, se P é un polinomio trigonometrico, $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin(nt)\, P(t)dt = 0$ non appena n é piú grande del 'grado' di P e quindi $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin(nt)\, g(t)dt \to_n 0 \qquad \forall g \in C_0((-\pi,\pi))$.

La successione f_n non ha peró estratte debolmente convergenti in L^∞. Segue da

1. Se $\phi_n \in C([0,2\pi])$ tende debolmente a zero in L^∞ allora $\phi_n(t) \to_n 0 \quad \forall t$.
2. Ogni sottosuccessione f_{n_k} converge al piú su un insieme di misura nulla.

Il fatto 1. si vede considerando $l_t(\phi) := \phi(t)$, $t \in [0,2\pi]$. Tale l_t é funzionale lineare e continuo (rispetto alla norma del sup) su $C([0,2\pi])$, ed é quindi, per Hahn-Banach, restrizione di un $l \in (L^\infty)'$. Ovviamente $l_t(\phi_n) \to_n 0 \Leftrightarrow \phi_n(t) \to_n 0$.

Il fatto 2. segue da Riemann-Lebesgue : $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin(nt)\, \chi_E(t)dt \to_n 0 \qquad \forall E \subset [-\pi,\pi]$ misurabile. Se infatti

$$E_0 := \{t \in [-\pi,\pi] : \exists \lim_n \sin(nt)\} = \{t \in [-\pi,\pi] : \exists \lim_n \cos(nt)\}$$

posto $g = \limsup_n \sin(nt)$, $h = \limsup_n \cos(nt)$, si ha $h^2 + g^2 \equiv 1$ in E e

$$0 = \lim_n \int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin(nt)\, g(t)\chi_E(t)dt = \int\limits_{-\pi}^{\pi} g^2\chi_E, \quad 0 = \lim_n \int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos(nt)\, h(t)\chi_E(t)dt = \int\limits_{-\pi}^{\pi} h^2\chi_E$$

e quindi

$$0 = \int\limits_{-\pi}^{\pi} (g^2 + h^2)\chi_E = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \chi_E = \mu(E)$$

Stesso argomento se n_k é crescente, e quindi ogni sottosuccessione di $\sin(nt)$ converge al piú su di un insieme di misura nulla.

Compattezza debole* (Teorema di Banach-Alaoglu). *Siano μ σ-finita ed $L^1(\mu)$ separabile. Allora*

$$\sup_n \|f_n\|_\infty < +\infty \;\Rightarrow\; \exists n_k,\ f \in L^\infty : \quad f_{n_k} \rightharpoonup^* f$$

Infatti : $\sup_n |\int f_n h| \le (\sup_n \|f_n\|_\infty)\, \|h\|_1 \;\; \forall\, h \in L^1 \Rightarrow$ (procedimento diagonale di Cantor !) $\exists n_k : \quad l(h) := \lim_k \int f_{n_k} h$ esiste finito $\forall h \in D \subset L^1$ numerabile e denso; l si prolunga in modo lineare e continuo a tutto L^1 e quindi

$$\exists g \in L^\infty : \quad \lim_k \int f_{n_k} h = l(h) = \int gh \quad \forall h \in D$$

e quindi (in modo standard) $\lim_k \int f_{n_k} h = \int gh \quad \forall h \in L^1$.

Funzionali lineari continui e misure. Sia $l \in (L^\infty(X, \Sigma, \mu))'$. Allora

$$\exists g \in L^1 : \quad l(f) = \int fg d\mu \qquad \forall f \in L^\infty \;\Leftrightarrow\; (f_n \rightharpoonup^* 0 \;\Rightarrow\; l(f_n) \to 0)$$

$\Rightarrow$ Ovvio.
$\Leftarrow$ Proviamolo nell'ipotesi aggiuntiva $f \ge 0 \;\Rightarrow\; l(f) \ge 0$. In tal caso $\mu_l(E) := l(\chi_E),\ E \in \Sigma$ é misura perché $E_j \in \Sigma,\ E_i \cap E_j = \emptyset\ \forall i \ne j \;\Rightarrow$

$$\chi_{\cup_{j\ge n+1} E_j} \to_n 0\ \forall x \;\Rightarrow\; \int \chi_{\cup_{j\ge 1} E_j}\ h \to_n 0 \quad \forall h \in L^1 \;\Rightarrow\; l(\chi_{\cup_{j\ge n+1} E_j}) \to_n 0 \;\Rightarrow$$

$$\mu_l(\cup_{j=1}^\infty E_j) = \sum_{j=1}^n l(\chi_{E_j}) + l(\chi_{\cup_{j\ge n+1} E_j}) = \sum_{j=1}^n \mu_l(E_j) + l(\chi_{\cup_{j\ge n+1} E_j}) \to_n \sum_{j=1}^\infty \mu_l(E_j)$$

Ora, per linearitá, $l(\varphi) = \int \varphi d\mu_l$ se $\varphi = \sum_{j=1}^n c_j \chi_{E_j}$.
Poi, se $0 \le \varphi_j \le f \in L^\infty(\mu)$ tende puntualmente ed in modo monotono a f, é $\int \varphi_j d\mu_l \to_j \int f d\mu_l$. Ma, per Lebesgue, é anche $\int \varphi_j h d\mu \to \int f h d\mu \quad \forall h \in L^1(\mu)$ e quindi $\int \varphi_j d\mu_l = l(\varphi_j) \to_j l(f)$. Quindi $\int f d\mu_l = l(f)$ e, scrivendo $f = f^+ - f^-$,

$$l(f) = \int f d\mu_l \qquad \forall f \in L^\infty(\mu)$$

Infine, $\mu(E) = 0 \;\Rightarrow\; \mu_l(E) = l(\chi_E) = 0$ (μ_l é 'assolutamente continua' rispetto a μ). Ma allora, l'esiatenza di $g \in L^1(\mu)$ tale che $\int f d\mu_l = \int fg d\mu \qquad \forall f \in L^\infty(\mu)$ é conseguenza del Teorema di Radon-Nikodym:

se ν é assolutamente continua rispetto a μ, esiste $g \in L^1(\mu)$ tale che

$$\nu(E) = \int_E g d\mu \qquad \forall E \in \Sigma$$

Esercizi e problemi 6

Esercizio 1.
Provare che l^∞ non é separabile.

Esercizio 2. Trovare una successione $l_n \in (l^\infty)'$ limitata, che non ha estratte debole* convergenti.

Esercizio 3. Sia $c_0 := \{x \in l^\infty : \quad x(j) \to_j 0\}$.

Provare che c_0 é sottospazio lineare chiuso di l^∞ e che

$$\forall a \in l^\infty, \quad \exists a_n \in c_0 : \qquad a_n \rightharpoonup^\star a$$

(non é in particolare vero che $x_n \in C \subset l^\infty$ chiuso e convesso, $x_n \rightharpoonup^\star x$ in l^∞ $\Rightarrow$ $x \in C$).

Esercizio 4. Sia $h \in l^1$. Posto

$$l_h(x) := \int_{\mathbf{N}} h\, x = \sum_j h(j)\, x(j) \quad \forall x \in c_0$$

provare che $Lh := l_h$ é una isometria lineare suriettiva di l^1 su $(c_0)'$ (l^1 é il duale di c_0...ma c_0 non é il duale di l^1!).

Esercizio 5.

Mostrare con un esempio che non tutte le successioni limitate in c_0 hanno estratte debolmente convergenti.

Esercizio 6. Provare che

$$x_n \in l^1, \quad x_n \rightharpoonup_n x \quad \Rightarrow \quad \|x_n - x\|_1 \to_n 0$$

Esercizio 7. Sia f misurabile. Provare che

(i) $\sup_{p\geq 1} \|f\|_p < +\infty \quad \Rightarrow \quad f \in L^\infty$

(ii) $f \in L^1 \cap L^\infty \quad \Rightarrow \quad f \in L^p \quad \forall p > 1$ e $\|f\|_p \to \|f\|_\infty$

CENNI DI SOLUZIONI

Esercizio 1. Sia $A := \{x : \mathbf{N} \to \{0,1\}\ \} = 2^{\mathbf{N}}$. Come noto, A non é numerabile (ha la potenza del continuo). Siccome

$$x, y \in A, \quad x \neq y \quad \Rightarrow \quad \|x - y\|_\infty = 1$$

esiste in l^∞ una famiglia non numerabile di palle disgiunte: un insieme denso in l^∞ , dovendo intersecare ciascuna di tali palle, non puó dunque essere numerabile.

Esercizio 2. Sia $l_n(x) := x(n) \quad \forall x \in l^\infty$. É

$$|l_n(x)| = |x(n)| \leq \sup_j |x(j)| = \|x\|_\infty \quad \text{e quindi} \quad \|l_n\| = 1$$

(infatti, se $e_n(j) := 0$ se $j \neq n$ e $e_n(n) := 1$, allora $l_n(e_n) = 1$).

Siccome

$$l_{n_k} \rightharpoonup^\star l \quad \Leftrightarrow \quad x(n_k) = l_{n_k}(x) \to l(x)$$

implica, in particolare, che $x(n_k)$ converge, tale l non puó esistere perché, quale che sia la selezione n_k esiste una successione limitata x tale che la $k \to x(n_k)$ non converga.

Esercizio 3. (i) Chiaramente,

$$x_n(j) \to_j 0 \quad \forall n, \quad \sup_j |x_n(j) - x(j)| \to_n 0 \quad \Rightarrow$$

$$|x(j)| \quad \leq \quad |x(j) - x_n(j)| + |x_n(j)| \quad \leq \quad 2\epsilon$$

se $n = n_\epsilon$ é abbastanza grande e $j \geq j(n_\epsilon)$, ovvero $x \in c_0$ e quindi c_0 é chiuso in l^∞.

Ricordiamo qui che, pensato $\mathbf{N}$ munito della misura che conta, i corrispondenti L^p si indicano l^p. In particolare, l^∞ é il duale di l^1:

$$\forall\, h \in l^\infty, \quad l_h(x) := \int_{\mathbf{N}} h\, x = \sum_{j=1}^{\infty} h(j)\, x(j) \quad \forall x \in l^1, \quad e \quad Lh := l_h$$

é isometria lineare suriettiva di l^∞ su $(l^1)'$.

Esempio: se $b_n := \chi_{\{1,\ldots,n\}}$, $b_n \in c_0$ e $l_{b_n}(x) := \int_{\mathbf{N}} b_n x = \sum\limits_{j=1}^{n} x(j) \quad \forall x \in l^1$. Si ha $l_{b_n}(x) \to_n \sum\limits_{j=1}^{\infty} x(j) = \int_{\mathbf{N}} x = l_{\chi_{\mathbf{N}}}$ ovvero $b_n \rightharpoonup^\star \chi_{\mathbf{N}} \notin c_0$. Piú in generale, $\forall a \in \mathbf{N}$ e posto $a_n := a\, b_n$, risulta

$$l_{a_n}(x) = \sum_j x(j)\, a_n(j) = \sum_{j=1}^{n} x(j)\, a(j) \to_n \sum_{j=1}^{\infty} x(j)\, a(j) = l_a(x) \quad \forall x \in l^1$$

ovvero $a_n \rightharpoonup^{\star} a$ in l^∞.

(ii) Se, per $h \in l^1$, $Lh := l_h$, $l_h(x) := \sum_j h(j)\, x(j)$, Lh é funzionale lineare e continuo su l^∞ e quindi anche su c_0 con $\|l_h\| = \|h\|_1$ perché $|l_h(x)| \leq \|x\|_\infty \sum_j |h(j)|$ e, viceversa, posto $x_n(j) := sign\, h(j)\, b_n(j)$ risulta $x_n \in c_0$, $\|x_n\|_\infty = 1$ e quindi $\|l_h\| \geq l_h(x_n) = \sum_{j=1}^{n} |h(j)| \ \forall n$.

Suriettivitá di L. Sia $l \in (c_0)'$ e , posto $e_n := \chi_{\{n\}} \in c_0$, sia $h := (l(e_j))_{j\in\mathbf{N}}$. Intanto, $h \in l^1$, perché

$$\sum_{j=1}^{n} |h(j)| = l(\sum_{j=1}^{n} \ sign\ h(j)\, e_j) \leq \|l\|\ \|\sum_{j=1}^{n} \ sign\ h(j)\, e_j\|_\infty \leq \|l\| \ \Rightarrow$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} |h(j)| \leq \|l\| < \infty$$

Infine $$\|x - b_n\, x\|_\infty = \sup_{j\geq n+1} |x(j)| \to_n 0 \quad \forall x \in c_0 \qquad \Rightarrow$$

$$l(x) = \lim_n l(x\, b_n) = \lim_n [\sum_{j=1}^{n} l(x(j) e_j) = \sum_{j=1}^{\infty} x(j)\, l(e_j) = l_h(x)$$

Esercizio 4.

Come in (ii)dell'esrcizio 3: $b_n := \chi_{\{1,\dots,n\}} \rightharpoonup^{\star} \chi_{\mathbf{N}} \notin c_0$.

In particolare, $l_{b_n}(e_j) \to_n 1 \quad \forall j$.

Esercizio 5. Per assurdo (passando eventualmente ad una sottosuccessione)

$\exists x_n \rightharpoonup 0$ in l^1 tale che $\|x_n\|_1 \geq \delta > 0$, e quindi, sostituendo x_n con $\frac{x_n}{\|x_n\|_1}$

$$\exists x_n \rightharpoonup 0 \quad \text{con} \quad \|x_n\|_1 = 1 \quad \forall n \in \mathbf{N}$$

Da $x_n \rightharpoonup 0$ ovvero $\sum\limits_j x_n(j)\, a(j) \to_n 0 \quad \forall a \in l^\infty$ segue, prendendo $a = \chi_{\{i\}}$,

$$x_n(i) \to_n 0 \quad \forall i \in \mathbf{N}$$

Quindi, per ogni fissato $m \in \mathbf{N}$, $\sum\limits_{j>m} |x_n(j)| > \frac{3}{4} \quad \forall n \geq n_m$

Siano poi $k_1 < l_1$ tali che $\sum\limits_{j=k_1}^{l_1} |x_1(j)| \geq \frac{3}{4}$.

Detto $n_1 = 1$, sia n_2 tale che se $k_2 > l_1$ ed $l_2 > k_2$ é abbastanza grande risulti

$$\sum_{j=k_2}^{l_2} |x_{n_2}(j)| \geq \frac{3}{4}$$

Iterando, si costruisce una sottosuccessione x_{n_i} tale che, se $k_i > l_{i-1}$ ed l_i é abbastanza grande risulti

$$\forall i \in \mathbf{N} : \quad \sum_{j=k_i}^{l_i} |x_{n_i}(j)| \geq \frac{3}{4} \quad \text{e quindi} \quad \sum_{j<k_i} |x_{n_i}(j)| + \sum_{j>l_i} |x_{n_i}(j)| \leq \frac{1}{4}$$

Se $a(j) = \ sign \ x_{n_i}(j) \ \forall j = k_i, \ldots, l_i$, é $a \in l^\infty$ e quindi $\sum_j x_{n_i}(j)\, a(j) \to_i 0$

$$\text{mentre} \quad \sum_j x_{n_i}(j)\, a(j) \geq \sum_{j=k_i}^{l_i} |x_{n_i}(j)| - \left[\sum_{j<k_i} |x_{n_i}(j)| + \sum_{j>l_i} |x_{n_i}(j)| \right] \geq \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

contraddizione.

Esercizio 6.

(i) Sia $\mu(\{x : \ |f(x)| \geq c\}) > 0$. Allora

$$\sup_{p\geq 1} (\int |f|^p)^{\frac{1}{p}} \geq (\int_{\{x:\ |f(x)|\geq c\}} |f|^p)^{\frac{1}{p}} \geq c\mu(\{x : \ |f(x)| \geq c\})^{\frac{1}{p}} \ \Rightarrow \ \sup_{p\geq 1} (\int |f|^p)^{\frac{1}{p}} \geq$$

$$\geq c \limsup_{p\to+\infty} \mu(\{x : \ |f(x)| \geq c\})^{\frac{1}{p}} = c \quad \Rightarrow \quad \mu(\{x : \ |f(x)| \geq c\}) = 0$$

se $c > \sup_{p\geq 1} (\int |f|^p)^{\frac{1}{p}}$ e quindi $\|f\|_\infty \leq \sup_{p\geq 1} (\int |f|^p)^{\frac{1}{p}}$

(ii) $p > 1 \quad \Rightarrow \quad \int |f|^p = \int |f| \ |f|^{p-1} \leq \|f\|_1 \ \|f\|_\infty^{p-1}$

$$\Rightarrow \quad \|f\|_p \leq \|f\|_1^{\frac{1}{p}} \ \|f\|_\infty^{\frac{p-1}{p}} \quad \Rightarrow \quad \limsup_{p\to+\infty} \|f\|_p \leq \|f\|_\infty$$

Poi, $c < \|f\|_\infty \quad \Rightarrow \quad \mu(\{x : \ |f(x)| \geq c\}) > 0$ ed allora

$$\|f\|_p \geq c\, \mu(\{x : \ |f(x)| \geq c\})^{\frac{1}{p}} \ \Rightarrow \ \liminf_{p\to+\infty} \|f\|_p \geq c \ \Rightarrow \ \liminf_{p\to+\infty} \|f\|_p \geq \|f\|_\infty$$