AM310- IV Settimana 2012

L^2 e gli spazi di HILBERT

$\|f\|_2^2 := \int |f|^2 = < f, f >$ ove $< f, g > := \int fg \, d\mu, \ \forall f, g \in L^2$ é un **prodotto scalare** (ovvero una **forma bilineare simmetrica positiva**) in L^2. Notiamo che la diseguaglianza di Holder, con $p = q = 2$ dá la ben nota

$$|\int fg| \leq \|f\|_2 \ \|g\|_2 \qquad \textbf{diseguaglianza di Cauchy-Schwartz}$$

Lo spazio L^2 **é uno spazio di Hilbert**:

SPAZI DI HILBERT . Un Banach $(H, \|.\|)$ é Hilbert se $\|x\| = \sqrt{< x, x >}$ $\forall x \in H$, ove $< x, y >$ é un **prodotto scalare** in H ovvero é forma bilineare e

$$< x, y > = < y, x > \ \forall x, y \in H, \ < x, x > \ > \ 0 \ \forall x \in H, \ x \neq 0$$

Le seguenti (ben note) proprietá si verificano facilmente:

Cauchy-Schwartz : $| < x, y > | \leq \|x\| \, \|y\| \quad \forall x, y \in H$
Pitagora : $< x, y >= 0 \ \Rightarrow \ \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \quad \forall x, y \in H$
Regola del Parallelogramma : $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$

Lemma. *Sia $C \subset H$ **convesso** (cioé $tx + (1 - t)y \in C \quad \forall x, y \in C, t \in [0, 1]$) e **chiuso**. Allora esiste un unico $h_C \in C$ tale che $\|h - h_C\| \leq \|h - x\| \forall x \in C$.* Inoltre

$$< h - h_C, x - h_C > \leq 0 \quad \forall x \in C$$

Prova del Lemma Posto $d := \inf_{x \in C} \|h - x\|$, sia $x_n \in C$ minimizzante, cioé $\|h - x_n\| \to_n d$. Dalla regola del parallelogramma

$$4d + \circ(1) = 2(\|h - x_n\|^2 + \|h - x_m\|^2) = \|x_n - x_m\|^2 + \|2[\frac{x_n + x_m}{2} - h]\|^2 \geq \|x_n - x_m\|^2 + 4d^2$$

perché $\|\frac{x_n + x_m}{2} - h\| \geq d$ in quanto $\frac{x_n + x_m}{2} \in C$. Dunque x_n é di Cauchy e quindi converge, necessariamente ad un elemento $h_C \in C$ perché C é chiuso. La regola del parallelogramma assicura, allo stesso modo, l'unicitá di tale punto di minimo. Infine, da $\|h - h_C\| \leq \|h - x\| \quad \forall x \in C$, segue, fissato $x \in C$, che per ogni $t \in [0, 1]$

$$\|h - h_C\|^2 \leq \varphi_x(t) := \|h - (tx + (1 - t)h_C)\|^2 = \|h - h_C\|^2 + t^2 \|x - h_C\|^2 + 2t < h - h_C, h_C - x >$$

ovvero $\varphi_x(0) \leq \varphi_x(t) \forall t \in [0, 1]$ e quindi $0 \leq \varphi_x'(0) = 2 < h - h_C, h_C - x > \quad \forall x \in C$.

Se il convesso C viene sostituito con un sottospazio vettoriale V di H, allora $< h - h_V, x >= 0 \, \forall x \in V($ $h - h_V$ é *ortogonale* a $V)$ e si trova

Corollario : $V = \overline{V} \quad \Rightarrow \quad V^\perp \neq \{0\}, \quad H = V \oplus V^\perp$.
Infatti $V \cap V^\perp = \{0\}$ ed ogni $h \in H$ si scrive come $h = P_V h + (h - P_V h) \in V + V^\perp$.

PROIEZIONE ORTOGONALE : *Se V é sottospazio lineare chiuso di H,*

$$\forall h \in H \quad \exists! \;\; h_V \in V : \quad < h - h_V, v >= 0 \quad \forall v \in V$$

Tale vettore si chiama proiezione ortogonale di h su V e si indica $P_V h$.
L'operatore $h \to P_V(h)$ é una **proiezione lineare** *di H in sé ed é* ***continuo***:

$$P_V^2 = P_V, \qquad P_V(rh + sk) = rP_V(h) + sP_V(k) \quad \forall r, s \in \mathbf{R}, h, k \in H$$

$$\|P_V(h)\| \leq \|h\| \quad \forall h \in H$$

Infine, indicato $V^\perp := \{h \in H : < h, v >= 0 \quad \forall v \in V\}$, *risulta* $KerP_V = V^\perp$.

Unicitá: $v_1, v_2 \in V$, $< h - v_1, v >=< h - v_2, v > \; \forall v \in V \Rightarrow$

$$< v_2 - v_1, v >=< h - v_1, v > - < h - v_2, v >= 0 \quad \forall v \in V \Rightarrow v_1 = v_2$$

Linearitá: Da $< h - P_V h, v > = < k - P_V k, v > = \; 0 \; \forall v \in V$ segue

$$< rh + sk - (rP_V h + sP_V k), v >= 0 \quad \forall v \in V \qquad \Rightarrow \qquad P_V(rh + sk) = rP_V h + sP_V k$$

per l'unicitá.
Poi, siccome $P_V v = v \quad \forall v \in V$ e $P_V h \in V \quad \forall h \in H$, P_V é idempotente.
Inoltre, $P_V h = 0 \Leftrightarrow < h, v >= 0 \quad \forall v \in V$.

Continuitá: Per Pitagora: $\|h\|^2 = \|(h - P_V h) + P_V h\|^2 = \|h - P_V h\|^2 + \|P_V h\|^2$ $\geq \|P_V h\|^2 \quad \forall h \in H$. Dunque $\|P_V h\| \leq \|h\|$ e $\|P_V h\| = \|h\| \Leftrightarrow P_V h = h$.

SISTEMI ORTONORMALI (SO) : Se $e_j \in H$ sono tali che $< e_i, e_j >= \delta_{ij}$, $(e_j)_{j \in \mathbf{N}}$ é sistema ortonormale. Se $V_n =< e_1, \ldots, e_n >$, allora V_n é chiaramente completo e, siccome $< h - \sum_i < h, e_i > e_i \; , \; e_j > =< h, e_j > - < h, e_j >= 0$, concludiamo che

$$P_{V_n} h = \sum_{j=1}^{n} < h, e_j > e_j$$

In particolare $\sum_{j=1}^n | < h, e_j > |^2 \; = \; \|P_n h\|^2 \; \leq \; \|h\|^2 \quad \forall h \in H, \quad \forall n \in \mathbf{N}$ e quindi

Diseguaglianza di BESSEL : $\sum_{j=1}^\infty | < h, e_j > |^2 \; \leq \|h\|^2 \quad \forall h \in H$

BASI ORTONORMALI (o Hilbertiane) .

Sia e_j sistema ortonormale e sia $V := \overline{< e_j >}$ la chiusura della varietá lineare generata dagli e_j, cioé $h \in V \Leftrightarrow h$ é limite di combinazioni lineari degli e_j.
Dato $h \in H$, da Bessel segue che la successione $h_n := \sum_{j=1}^{n} < h, e_j > e_j$ é di Cauchy, perché $\|h_{n+p} - h_n\|^2 = \sum_{j=n+1}^{n+p} | < h, e_j > |^2$ ed ha quindi un limite, che indichiamo

$$\sum_{j=1}^{\infty} < h, e_j > e_j := \lim_{n \to +\infty} \sum_{j=1}^{n} < h, e_j > e_j$$

Esattamente come sopra $\qquad P_V h = \sum_{j=1}^{\infty} < h, e_j > e_j \qquad \forall\, h \in H$

Infatti, usando la linearitá e continuitá dei funzionali $x \to < k, x >$, troviamo $< \lim_n \sum_{j=1}^{n} < h, e_j > e_j, e_i > = \lim_n < \sum_{j=1}^{n} < h, e_j > e_j, e_i > = < h, e_i >$ e quindi $< h - \sum_{j=1}^{\infty} < h, e_j > e_j, e_i >= 0 \quad \forall i$ e quindi, di nuovo per linearitá e continuitá, $< h - \sum_{j=1}^{\infty} < h, e_j > e_j, v >= 0 \quad \forall v \in V$.

Proposizione. *Sia e_j sistema ortonormale. Allora, le affermazioni*

(i) $V := \overline{< e_j >} = H$ $\qquad$ (la varietá lineare generata dagli e_j é densa in H)
(ii) $h = \sum_{j=1}^{\infty} < h, e_j > e_j \quad \forall h \in H$ $\qquad$ (e_j **é base ortonormale**)
(iii) $\|x\|^2 = \sum_j | < x, e_j > |^2 \quad \forall x \in H$ $\qquad$ (**identitá di Parseval**)
(iv) $< x, e_j >= 0 \quad \forall j \quad \Rightarrow \quad x = 0$ $\qquad$ (e_j **é sistema completo)**

sono tra loro equivalenti.

Nomenclatura. Supponiamo e_j sia base ortonormale. Allora:
-$\sum_{j=1}^{\infty} < h, e_j > e_j$ si dice **sviluppo in serie di Fourier** (nella base e_j) di h
-$< h, e_j >$ si dicono **coefficenti di Fourier** di h(nella base e_j).

Prova (i) $\Leftrightarrow V = H \Leftrightarrow P_V h = h \quad \forall h \Leftrightarrow$ (ii) $\Leftrightarrow \|P_V h\| = \|h\| \quad \forall h \Leftrightarrow$ (iii)
(iii) $\Rightarrow x = 0$ se $< x, e_j > \ \forall j$, ovvero e_j é completo, ovvero(iv).
(iv) $\Rightarrow$ (i), ovvero $V = H$, perché se no esiste $h \neq 0, h \in V^{\perp}$ e tale quindi che $< h, e_j >= 0\, \forall j$.

Un esempio importante: $e_j := \frac{e^{ijt}}{\sqrt{2\pi}}$, $\quad t \in [0, 2\pi]$, $\quad j \in \mathbf{Z}$ formano un sistema ortonormale completo in $L^2([0, 2\pi])$. Ció segue dal teorema di Weierstrass (ogni funzione continua in $[0, 2\pi]$ é limite uniforme di polinomi trigonometrici) e del fatto che, come vedremo, se Ω é aperto in $\mathbf{R}^N$, $C_0^{\infty}(\Omega)$ (spazio delle funzioni $C^{\infty}(\Omega)$ a supporto compatto contenuto in Ω), é denso in ogni L^p.

Un Hilbert separabile ha un sistema ortonormale (numerabile) completo.

Infatti, se D é numerabile e denso in H, da D si puó costruire un insieme numerabile di vettori linearmente indipendenti f_j tali che la varietá lineare $< f_j >$ coincide con $< D >$ e quindi $< f_j >$ é densa in H. Posto $e_1 = \frac{f_1}{\|f_1\|}$ e quindi, induttivamente, $e_{k+1} = \frac{v_{k+1}}{\|v_{k+1}\|}$, ove

$$v_{k+1} := f_{k+1} - \sum_{j=1}^{k} < f_{k+1}, e_j > e_j$$

(proiezione ortogonale di f_{k+1} sulla varietá $< e_1, \ldots, e_k >^{\perp}$: procedimento di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt) si ottiene un sistema (numerabile) ortonormale che genera una varietá lineare densa (e quindi é completo).

Proposizione 2. *Ogni Hilbert separabile ha una base hilbertiana.*

NOTA. Sia e_j base ortonormale. Da Parseval: $x \to (Fx)_j :=< x, e_j >, \;\; x \in H$ é una isometria (lineare) di H su l^2. (Suriettivitá: $(a_j)_{j \in \mathbf{N}}, \; \sum_j |a_j|^2 < +\infty \;\; \Rightarrow \;\; x := \sum_j a_j e_j \in H$ é tale che $(Fx)_j = a_j$.)

Teorema di isomorfismo. *Ogni Hilbert separabile é isometricamente isomorfo a* l^2.

NOTA. Piú in generale, ogni Hilbert é isometricamente isomorfo a un $L^2(X, \mu)$, ove X é l'insieme degli indici di una base hilbertiana per H (eventualmente non numerabile) e μ é la misura che conta.

SPAZIO DUALE . Sia $H' := \{l : H \to \mathbf{R} : \;\; l \text{ é lineare e continuo}\}$
H' é spazio lineare. Dotato della norma degli operatori $\|l\| := \sup_{x \neq 0} \frac{|l(x)|}{\|x\|}$ é uno spazio di Banach. Tale spazio é detto **duale algebrico topologico** di H.

TEOREMA DI RAPPRESENTAZIONE DI RIESZ .

Per ogni $l \in H'$ *esiste* $h \in H$: *tale che* $l(x) \; =< x, h > \quad \forall x \in H$

Prova. Se $l(x) = 0 \;\; \forall x \in H$, basta prendere $h = 0$. Altrimenti, l continuo $\Rightarrow$ $V := l^{-1}(0)$ é sottospazio lineare chiuso proprio di H, e quindi esiste $h \neq 0$ tale che $< h, v >= 0 \;\; \forall v \in V$. Posiamo supporre $\|h\| = 1$. Siccome $l(x - \frac{l(x)}{l(h)} h) = 0 \;\; \forall x \in H$, abbiamo che $< h, x - \frac{l(x)}{l(h)} h >= 0 \;\; \forall x \in H$ ovvero $l(x) =< x, l(h) h >$.

NOTA. Dato $h \in H$, il funzionale $l_h(x) :=< x, h >, \quad x \in H,$ é lineare , e, per Cauchy-Schwartz, continuo e quindi $l_h \in H'$. Inoltre, l'applicazione $\quad T : h \to l_h$ di H in H' é lineare ed isometrica, cioé $\|T(h)\| = \|l_h\| = \|h\|$. Il Teorema di Riesz dice che T é **isometria suriettiva**, ovvero

Corollario (RIESZ) . *Ogni Hilbert é isometricamente isomorfo al suo duale.*

CONVERGENZA DEBOLE

Ricordiamo che $x_n \to_n x$ (x_n **converge in norma, o fortemente** ad x) se $\|x_n - x\| \to_n 0$ e $x_n \in H$ si dice **limitata** se $\sup_n \|x_n\| < +\infty$.

NOTA: **successioni limitate** in spazi di Hilbert di dimensione infinita **non hanno in generale sottosuccessioni convergenti**. Ad esempio, se $e_j, j \in \mathbf{N}$ é sistema ortonormale, allora $\|e_i - e_j\|^2 = 2$ se $i \neq j$ e quindi e_j non ha estratte convergenti.

Definizione $('\rightharpoonup' \quad = \quad$ ' converge debolmente').

$$x_n \rightharpoonup_n 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad < x_n, h > \to_n 0 \quad \forall h \in H$$

Si dice che $x_n \rightharpoonup_n x$ se $(x_n - x) \rightharpoonup_n 0$. Dalla diseguaglianza di Bessel segue ad esempio che, se $e_j, j \in \mathbf{N}$ é sistema ortonormale, $e_j \rightharpoonup_j 0$.

Proposizione 3

(i) $x_n \to x \quad \Rightarrow \quad x_n \rightharpoonup_n x$ *(ma non viceversa !)*

(ii) $x_n \rightharpoonup_n x, \; y_n \rightharpoonup_n y, \quad \alpha, \beta \in \mathbf{R} \quad \Rightarrow \quad \alpha x_n + \beta y_n \rightharpoonup_n \alpha x + \beta y$

(iii) $x_n \rightharpoonup_n x \quad \Rightarrow \quad \liminf \|x_n\| \geq \|x\|$

Prova. (i) $\quad | < x_n - x, h > | \leq \|h\| \; \|x_n - x\| \to_n 0.$ (ii) ovvia

(iii) Possiamo supporre $x \neq 0$. Allora

$$| < x_n, \frac{x}{\|x\|} > | \leq \|x_n\| \quad \Rightarrow \quad \|x\| = \lim_n | < x_n, \frac{x}{\|x\|} > | \leq \liminf \|x_n\|$$

NOTA. Da (iii):'la norma é 'inferiormente semicontinua rispetto alla convergenza debole'.

Teorema (uniforme limitatezza). $\quad x_n \rightharpoonup_n x \quad \Rightarrow \quad \sup_n \|x_n\| < +\infty$

Lemma di Mazur. $\quad v_n \in C \quad$ *chiuso e convesso*, $\quad v_n \rightharpoonup_n v \quad \Rightarrow \quad v \in C.$

Prova. Sia h_C la proiezione di h su C. Si ha $< h - h_C, v_n - h_C > \leq 0 \quad \forall n$, perché $v_n \in C$. Passando al limite otteniamo $\|h - h_C\|^2 \leq 0$ e quindi $h = h_C \in C$.

Proposizione 2

(i) $x_n \rightharpoonup_n x, \ \ y_n \to y \quad \Rightarrow \quad < x_n, y_n > \to_n < x, y >$

(ii) $\overline{< e_i >} = H, \ < x_n, e_j > \to_n 0 \quad \forall j, \quad \sup_n \|x_n\| < +\infty \quad \Rightarrow \quad x_n \rightharpoonup_n 0$

Prova. (i) $\ |< x_n, y_n > - < x\,, y >| \ = \ |< x_n - x, y > \ + \ < x_n\,, y_n - y >| \ \leq$

$\leq \ |< x_n - x, y >| \ + \ \|y_n - y\| \ \|x_n\| \ \to_n 0$ $\qquad$ perché $\ x_n \ $ é limitata

(ii) $< x_n, h > \to_n 0 \quad \forall h \in < e_j >$. $\quad$ Se $\quad h_k \in < e_j >, \quad h_k \to_k h,\quad$ allora $|< x_n, h >| \leq |< x_n, h_k >| + |< x_n, h - h_k >| \quad \Rightarrow \quad \limsup_n |< x_n, h >| \leq \|h_k - h\| \quad \sup_n \|x_n\| \quad \forall k \in \mathbf{N}$ e quindi $\quad \limsup_n |< x_n, h >| = 0.$

Compattezza debole. $\qquad$ *Sia H Hilbert separabile. Allora* x_n **limitata** $\quad \Rightarrow \quad x_n$ **ha una estratta debolmente convergente**.

Prova. Sia e_j base ortonormale. Siccome x_n é limitata, basta (vedi Proposizione 2-(ii)) provare che $\quad \exists \ \ x_{n_k}, \ x : \ < x_{n_k}, e_j > \to_k < x, e_j > \quad \forall j \in \mathbf{N}$ Siccome $\ |< x_n, e_1 >| \leq \sup_n \|x_n\| < +\infty,\ $ esiste una selezione (crescente) di indici $\ \varphi_1 : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ e un numero c_1 tale che $\ c_1 = \lim_j < x_{\varphi_1(j)}, e_1 >$. Effettuando una (ulteriore) selezione di indici $\ \varphi_2(j),\ $ troviamo che $\ \exists c_2 := \lim_j < x_{\varphi_2(j)}, e_2 >\ $ e quindi $c_i = \lim_j < x_{\varphi_1 \circ \varphi_2(j)}, e_i >, i = 1, 2$. Effettuando k successive selezioni di indici φ_k troviamo (**metodo diagonale di Cantor**) che lungo la sottosuccessione (diagonale) $\ n_k := (\varphi_1 \circ \ldots \circ \varphi_k)(k)\ $ si ha $\exists c_i := \ \lim_k < x_{n_k}, e_i > \quad \forall i \in \mathbf{N}$

Da $\ \sum_{i=1}^N c_i^2 = \lim_k \sum_{i=1}^N |< x_{n_k}, e_i >|^2 \leq \sup_n \|x_n\|^2 \quad \forall N \ $ segue che $\sum_{i=1}^\infty c_i^2 < +\infty$. $\ $ Resta quindi definito il vettore in H dato da $\ x := \sum_{i=1}^\infty c_i e_i$ avente appunto la proprietá $\quad < x, e_j >= c_j = \lim_k < x_{n_k}, e_j >$.

NOTA. $\ $ L'ipotesi di separabilitá si puó facilmente eliminare, argomentando nella chiusura della varitá lineare generata dagli x_n (che é appunto separabile).

Esercizi e complementi 4

Spazi L^p

Esercizio 1. Siano $p_i > 1$, $\frac{1}{p_1} + \ldots + \frac{1}{p_l} = \frac{1}{p} \leq 1$. Siano $f_1, \ldots, f_l$ misurabili. Provare che $(\int |f_1 \ldots f_l|^p)^{\frac{1}{p}} \leq (\int |f_1|^{p_1})^{\frac{1}{p_1}} \ldots (\int |f_l|^{p_l})^{\frac{1}{p_l}}$

Esercizio 2 . Data f Lebesgue misurabile in $\mathbf{R}^n$, $t > 0$, sia $f_t(x) = f(tx)$. Provare che
(i) f_t è misurabile, (ii) $f \in L^p \Rightarrow f_t \in L^p$ e $||f_t||_p = t^{-\frac{n}{p}} ||f||_p$

Esercizio 3. Siano $f_n \in L^p(X)$ tali che $\sup_n \int_X |f_n|^p < +\infty$. Provare che $\liminf |f_n| \in L^p$, mentre può accadere che $\int \limsup |f_n| = +\infty$.

Esercizio 4. Sia $\mu(X) < +\infty$. Siano $1 \leq s < t$. Provare che

(i) $f \in L^t \Rightarrow f \in L^s$, e l'inclusione $L^t \subset L^s$ è stretta
(ii) l'inclusione $L^t \subset L^s$ è falsa se $\mu(X) = +\infty$.

Esercizio 5. Sia f_n successione limitata in $L^p(\mathbf{R}^n)$, $p \geq 1$. Provare che

$$f_n \to f \quad q.o., \quad \int |f_n|^p \to \int |f|^p \quad \Rightarrow \quad \|f_n - f\|_p \to 0$$

Esercizi sugli L^p: cenni di soluzione

Esercizio 2 . E misurabile, $A \subset tE$, $B \subset tE^c \Rightarrow \frac{1}{t}A \subset E$, $\frac{1}{t}B \subset E^c \Rightarrow \mu(A \cup B) = t^n \mu(\frac{1}{t}A \cup B) = t^n[\mu(\frac{1}{t}A) + \mu(\frac{1}{t}B)] = \mu(A) + \mu(B) \Rightarrow tE$ é misurabile. Inoltre, $\chi_E(tx) = \chi_{\frac{1}{t}E}$ é misurabile e $\int \chi_E(tx) d\mu(x) = \mu(\frac{1}{t}E) = (\frac{1}{t})^n \mu(E) = t^{-n} \int \chi_E$. Infine, se $0 \leq f$ é misurabile e $0 \leq \varphi_j \leq \varphi_{j+1} \leq f$, allora

$$\int f^p(tx) d\mu(x) = \lim_j \int \varphi_j^p(tx) d\mu(x) = t^{-n} \int f^p$$

Esercizio 5. Dallle ipotesi ed usando Fatou segue che, se E é misurabile

$$\int |f|^p - \overline{\lim}_n \int_E |f_n|^p = \underline{\lim}_n [\int |f_n|^p - \int_E |f_n|^p] \geq \int_{E^c} |f|^p$$

e quindi $\overline{\lim}_n \int_E |f_n|^p \leq \int_E |f|^p$ e quindi, di nuovo per Fatou, $\lim_n \int_E |f_n|^p = \int_E |f|^p$. Ció assicura l'uniforme assoluta continuitá degli integrali e quindi l'applicabilitá del Teorema di Vitali, e quindi $\|f_n - f\|_p \to_n 0$.

SERIE DI FOURIER DI FUNZIONI $L^2([-\pi,\pi])$

Indichiamo con $C_{2\pi}$ lo spazio delle funzioni continue in $\mathbf{R}$ a valori complessi che sono 2π periodiche, dotato della norma della convergenza uniforme in $[-\pi,\pi]$:

$$C_{2\pi} \quad := \quad \{f \in C(\mathbf{R},\mathbf{C}) : \quad f(t+2\pi) = f(t) \quad \forall t \in \mathbf{R}\}, \qquad \|f\|_\infty := \sup_{t\in[-\pi,\pi]} |f(t)|$$

Tra tali funzioni é definito il prodotto di convoluzione

$$f \star g \ (t) := \int_{-\pi}^{\pi} f(t-s)\, g(s) ds$$

Indicheremo con $\mathcal{PT}$ il sottospazio dei polinomi trigonometrici, ovvero il sottospazio lineare generato da $e^{ijt} : j \in \mathbf{N}$.

Esercizio 1 . Provare che

(i) $f \star g \quad = \quad g \star f$ (ii) $f \in C_{2\pi}, \quad g \in \mathcal{PT} \quad \Rightarrow \quad f \star g \in \mathcal{PT}$

Esercizio 2. Siano $g_n \in C_{2\pi}$ tali che

$$g_n(t) \geq 0 \quad \forall t, \qquad \int_{-\pi}^{\pi} g_n = 1 \quad \forall n \in \mathbf{N}, \qquad \int_{|t|\geq\delta} g_n \to_n 0 \quad \forall \delta > 0$$

Provare che $f \star g_n \to_n f$ uniformemente in $[-\pi,\pi]$.

Esercizio 3 . Siano

$$\tilde{g}(t) := \frac{1+\cos t}{2} = \frac{1}{2}[1 + \frac{e^{it}+e^{-it}}{2}], \qquad g_n := \frac{\tilde{g}^n}{\int_{-\pi}^{\pi} \tilde{g}^n}$$

Provare che le g_n soddisfano le condizioni dell'Esercizio 2 e concludere che $\mathcal{PT}$ é denso in $C_{2\pi}$.

Esercizio 4. Sia $f \in L^2([-\pi,\pi])$. Provare che

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists \phi_\epsilon \in C_0([-\pi,\pi]) : \qquad \int_{-\pi}^{\pi} |f-\phi_\epsilon|^2 \leq \epsilon$$

e concludere che $\frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin kt$, $\frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos kt$, $k \in \mathbf{N}$ é base hilbertiana in $L^2([-\pi,\pi])$.

SPAZI DI HILBERT, CONVERGENZA DEBOLE

Procedimento diagonale di Cantor. Siano $f_n : \mathbf{N} \to \mathbf{R}$ tali che

$$\sup_n |f_n(j)| < +\infty \quad \forall j \in \mathbf{N}$$

Provare che $\exists \quad f : \mathbf{N} \to \mathbf{R}$ ed una selezione n_k tale che $\quad f_{n_k}(j) \to f(j) \quad \forall j \in \mathbf{N}$.

Esercizio 1 (uniforme limitatezza). Provare che $x_n \rightharpoonup x \Rightarrow \sup_n \|x_n\| < +\infty$.

Esercizio 2. Sia $x_n \in C$ chiuso e convesso in H. Provare che se $x_n \rightharpoonup x$ allora esistono $\tilde{x}_n$, combinazioni lineari convesse degli x_n, tali che $\|\tilde{x}_n - x\| \to_n 0$.

Esercizio 3. Sia C convesso chiuso e $\Gamma : C \to \mathbf{R}$ funzionale convesso e continuo. Provare che $(x_n \in C, \quad x_n \rightharpoonup x) \quad \Rightarrow \quad \liminf \Gamma(x_n) \geq \Gamma(x)$ e che, se Γ é anche **coercivo**, cioé $x_n \in C,\ \|x_n\| \to +\infty \ \Rightarrow \ \Gamma(x_n) \to +\infty$, allora $\exists \underline{x} \in C : \quad \inf_C \Gamma = \Gamma(\underline{x})$

Esercizio 4. Provare che $x_n \rightharpoonup x,\ \|x_n\| \to \|x\| \ \Rightarrow \ \|x_n - x\| \to 0$.

Esercizio 5. Sia $L \in \mathcal{L}(H)$ (operatore lineare e continuo in H).
Provare che esiste un (unico) $L^\star \in \mathcal{L}(H)$ tale che $< L^\star x, y > = < x, Ly >$ $\forall x, y \in H$ (**operatore aggiunto** di L) e dedurre che $x_n \rightharpoonup x \ \Rightarrow \ Lx_n \rightharpoonup Lx$

Esercizio 6. Provare che $\int_A e^{inx} dx \to 0 \forall A \subset [0, \pi]$ misurabile e dedurre che , se $n_k < n_{k+1}$, l'insieme $\{x \in [0, \pi] : \ \sin(n_k x) \ \text{ converge } \}$ è di misura nulla.

CENNI DI SOLUZIONE

Serie di Fourier in $L^2([-\pi, \pi])$

Esercizio 1 - (ii). Sia $g(t) = \sum_{j=1}^n c_j \, e^{ijt}$. Si ha

$$(f \star g)(t) \ = \ \int_{-\pi}^{\pi} f(s) \left[\sum_{j=1}^n c_j \, e^{ij(t-s)} \right] ds = \sum_{j=1}^n \ [c_j \int_{-\pi}^{\pi} f(s) e^{-ijs} \ ds] \ e^{ijt}$$

Esercizio 2. $|(f \star g_k)(t) \ - \ f(t)| \ = \ \left| \int_{-\pi}^{\pi} f(t-s) \, g_k(s) \, ds \ - \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \, g_k(s) \, ds \right| \ \leq$

$$\leq \int_{|s| \leq \delta} |f(t-s) - f(t)| \ g_k(s) \, ds \ + \ 2 \, \|f\|_\infty \int_{|s| \geq \delta} g_k(s) \, ds \ \leq \ \epsilon \ + \ 2 \|f\|_\infty \epsilon$$

se $\quad \delta \le \delta_\epsilon, \quad |s| \le \delta \quad \Rightarrow \quad |f(t-s)-f(s)| \le \epsilon \quad$ e $\quad k \ge k_\epsilon \quad \Rightarrow \quad \int\limits_{|t|\ge\delta} g_k \le \epsilon.$

Esercizio 3. Si tratta di provare che $\int\limits_{|s|\ge\delta} g_k(s)\,ds \ \to_k 0 \quad \forall \delta > 0.$

É $c_k := \int\limits_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{1+\cos t}{2}\right]^k dt \ \ge 2 \int\limits_0^{\pi} \left[\frac{1+\cos t}{2}\right]^k \sin t \ dt = -\frac{4}{k+1} \int\limits_0^{\pi} \frac{d}{dt}\left[\frac{1+\cos t}{2}\right]^{k+1} = \frac{4}{k+1}.$

Quindi $\quad \frac{1}{c_k} \int\limits_{|s|\ge\delta} g_k(s)\,ds \ \le \ \frac{(k+1)\pi}{2} \left[\frac{1+\cos\delta}{2}\right]^k \to_k 0 \quad \forall \delta > 0$

Esercizio 4. Possiamo supporre $\quad f \equiv 0 \quad$ fuori di $\quad [-\pi, \pi] \quad$ e infatti

$f \equiv 0 \quad \forall \ t \notin [-\pi + \frac{1}{n}, \pi - \frac{1}{n}]$ perché $\int |f - f\chi_{[-\pi+\frac{1}{n}, \pi-\frac{1}{n}]}|^2 \le \epsilon$ se n é grande

(assoluta continuitá dell'integrale). Siccome $\quad f = f^+ - f^-, \quad$ basta provare che

se $\quad g \ge 0, \quad g \in L^2(\mathbf{R}), \quad g(t) \ = \ 0 \quad \forall \ t \notin [-\pi + \frac{1}{n}, \pi - \frac{1}{n}], \quad$ allora
$\forall \epsilon > 0, \quad \exists \tilde g \in C_0((-\pi, \pi)) : \quad \int\limits_{-\pi}^{\pi} |g - \tilde g|^2 \ \le \ \epsilon$

Siccome esistono $0 \le \phi_n \le g$ semplici con $\phi_n \le \phi_{n+1}$ puntualmente convergenti a f, e quindi (Levi!) convergenti a g anche in L^2, basta provare che,

se $\quad E \subset [-\pi + \frac{1}{n}, \pi - \frac{1}{n}]\quad$ é Lebesgue misurabile $\quad$, allora
$\forall \epsilon > 0, \quad \exists \quad h \in C_0(-\pi, \pi) : \quad \int |\chi_E - h|^2 \le \epsilon$

Ma ció segue subito dal fatto che

$\forall \epsilon > 0, \quad \exists \quad K_\epsilon \ \subset \ E \ \subset \ O_\epsilon \ \subset \ (-\pi, \pi) : \qquad L^1(O_\epsilon \setminus K_\epsilon) \le \epsilon$

con $\quad K_\epsilon \quad$ compatto, $\quad O_\epsilon \quad$ aperto.

Infatti, dato $\ \delta > 0 \ $ tale che $\quad d(x, K_\epsilon) \le \delta \quad \Rightarrow \quad x \in O_\epsilon, \quad$ basta prendere $\varphi_\epsilon(x) := \ \gamma(d(x, K_\epsilon)) \quad$ ove $\quad \gamma \in C(\mathbf{R}) \quad$ con $\ \gamma(0) = 1 \ $ e $\ \gamma(t) = 0$ se $t \ge \delta$:

$$\int |\varphi_\epsilon - \chi_E|^2 \le 4 \int \chi_{O_\epsilon \setminus K_\epsilon} = 4L^1(O_\epsilon \setminus K_\epsilon) \le 4\epsilon$$

Spazi di Hilbert, convergenza debole

Procedimento diagonale di Cantor. Siccome $f_n(1)$ é limitata, esiste una (prima) selezione di indici n_j^1 ed un numero $f(1)$ tale che $f_{n_j^1}(1) \to_j f(1)$. Poi, esiste una (seconda, ulteriore) selezione di indici $(n_j^2)_{j\in\mathbf{N}} \subset (n_j^1)_{j\in\mathbf{N}}$ ed un numero $f(2)$ tale che $f_{n_j^2}(2) \to_j f(2)$ ed anche $f_{n_j^2}(1) \to_j f(1)$. Iterando, troviamo, per ogni $k \in \mathbf{N}$, una k-esima selezione di indici $(n_j^k)_{j\in\mathbf{N}} \subset (n_j^{k-1})_{j\in\mathbf{N}}$ e un numero $f(k)$ tale che

$$f_{n_j^k}(i) \to_j f(i) \quad \forall i \le k$$

Siccome, fissato $i \in \mathbf{N}$, se $j \ge i$ risulta $(n_j^j)_{j\in\mathbf{N}} \subset (n_j^i)_{j\in\mathbf{N}}$, concludiamo che

$$f_{n_j^j}(i) \to f(i) \quad \forall i$$

Esercizio 1. Posto $y_n := x_n - x$ é $y_n \rightharpoonup 0$. Se y_n é non limitata, allora, per una sottosuccessione (ancora indicata y_n), si avrá $\|y_n\| \ge 4^n$ e quindi

$$h_n := 4^n \frac{y_n}{\|y_n\|}, \qquad \|h_n\| = 4^n, \qquad < y_n,\, h > \to_n 0 \quad \forall h \in H$$

Basta quindi provare che se $\|h_n\| = 4^n$ allora non puó accadere che $h_n \rightharpoonup 0$. Per provare tale affermazione, poniamo

$$h := \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\sigma_j}{3^j} \frac{h_j}{\|h_j\|}, \qquad |\sigma_j| = 1 \quad \forall j$$

e proviamo che, per una scelta opportuna dei σ_j risulta $| < h_j, h > | \to_n +\infty$. É

$$| < h_n, h > | = | \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\sigma_j}{3^j} < h_n, \frac{h_j}{\|h_j\|} > | \ge$$

$$\left| \, | \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\sigma_j}{3^j} < h_n, \frac{h_j}{\|h_j\|} > + \frac{\sigma_n}{3^n}\|h_n\| \, | - | \sum_{j>n} \frac{\sigma_j}{3^j} < h_n, \frac{h_j}{\|h_j\|} > | \right|$$

Se scegliamo $\sigma_1 := 1$ e, induttivamente,

$$\sigma_n := 1 \text{ se } \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\sigma_j}{3^j} < h_n, \frac{h_j}{\|h_j\|} \ge 0 \text{ e } \sigma_n := -1 \text{ se } \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\sigma_j}{3^j} < h_n, \frac{h_j}{\|h_j\|} < 0$$

vediamo che $| < h_n, h > | \ge \frac{4^n}{3^n} - \sum_{j>n} \frac{1}{3^j}\|h_n\| = \frac{1}{2}\frac{4^n}{3^n}$.

Esercizio 2. $x_n \in C$, $x_n \rightharpoonup x$, x_C proiezione di x sul convesso chiuso $C \Rightarrow$

$$< x - x_C, x_n - x_C > \le 0 \quad \Rightarrow \quad < x - x_C, x - x_C > \le 0 \quad \Rightarrow \quad x = x_C \in C$$

Esercizio 3. Sia $c := \liminf_n \Gamma(x_n) = \lim_j \Gamma(x_{n_j})$. Allora

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists j_\epsilon : \qquad j \ge j_\epsilon \quad \Rightarrow \quad x_{n_j} \in \Gamma^{c+\epsilon} := \{x \in C : \Gamma(x) \le c + \epsilon\}$$

Ora, $\Gamma^{c+\epsilon}$ é chiuso (perché Γ é continuo) e convesso (perché Γ é convesso), e quindi (Esercizio 2)

$$x_n \rightharpoonup x \ , x_n \in \Gamma^{c+\epsilon} \quad \Rightarrow \quad x \in \Gamma^{c+\epsilon} \quad \forall \epsilon > 0$$

ovvero $\Gamma(x) \leq c + \epsilon, \quad \forall \epsilon > 0.$

Esercizio 4. Sia $x_n \in C$ minimizzante: $\Gamma(x_n) \to \inf_C \Gamma.$

Dalla coercivitá segue $\sup_n \|x_n\| < +\infty$ e quindi esiste una sottosuccessione x_{n_k} (ancora minimizzante) che converge debolmente a un x. Siccome C é chiuso e convesso, allora (Esercizio 2) $x \in C$ e quindi (Esercizio 3)

$$\inf_C \Gamma \quad = \quad \liminf_k \Gamma(x_{n_k}) \quad \geq \quad \Gamma(x) \quad \geq \quad \inf_C \Gamma$$

Esercizio 4. $\|x_n - x\|^2 = \|x_n\|^2 + \|x\|^2 - 2 < x, x_n > \to 2\|x\|^2 - 2 < x, x >.$

Esercizio 5. Indichiamo con $G : H \to H^\star$ l'isomorfismo di Riesz:

$$\forall h \in H, \qquad G(h)\ (x) \ = < h, x > \quad \forall x \in H$$

Fissato $y \in H$, $x \to l^y(x) := < L(x), y >$ é un funzionale lineare e continuo e quindi esiste un unico vettore, diciamo $L^\star(y)$, tale che

$$G(L^\star(y)) = l^y, \quad \text{ovvero} \quad < L^\star(y), x > \ = \ l^y(x) = < L(x), y > \quad \forall x \in H$$

Chiaramente, $L^\star$ é lineare e $| < L^\star(y), x > | \ = \ | < L(x), y > |$

$$\leq \ \|Lx\| \ \|y\| \ \leq \ \|L\| \ \|x\| \ \|y\| \quad \Rightarrow \quad \|L^\star(y) \ \| \ \leq \ \|L\| \ \|y\|$$

e quindi $L^\star$ é continuo e

$$\|L^\star\| := \ \sup\{\|L^\star(y) : \ \ \|y\| \leq 1\} \ \leq \ \|L\|$$

In effetti, siccome chiaramente $(L^\star)^\star = L$, si ha $\|L^\star\| = \|L\|$. Infine,

$$x_n \rightharpoonup x \quad \Rightarrow \quad < L(x_n), y > = < L^\star(y), x_n > \to < L^\star(y), x > = < L(x), y > \quad \forall y \in H$$

Esercizio 6. Da Bessel:

$$\sum_n | \int_0^{2\pi} e^{int} \chi_A dt|^2 \leq \|\chi_A\|_2^2 \quad \Rightarrow \quad \int_0^{2\pi} e^{int} \chi_A dt \to_n 0$$

Poi, se $f(x) := \lim \sin(n_k x)$ in $A := \{x : \ \exists \lim_k \sin(n_k x)\}$, per quanto sopra si ha

$$0 = \lim_k \int_0^\pi \sin(n_k x) \chi_{\{f \geq 0\}} = \int_0^\pi f \chi_{\{f \geq 0\}}$$

e quindi $f^+ = 0$ q.o. ed, analogamente per f^- e quindi esiste N_s con $\mu(N_s) = 0$ tale che $\sin n_k x \to 0$ in $A \setminus N_s$.
Analogamente, $\cos n_k x \to 0$ in $A \setminus N_c$. Ma $1 = \sin^2 n_k x + \cos^2 n_k x \to 1$ in A e quindi $A \subset N_s \cup N_c$.