AM310-2012: Settimana 3

INTEGRAZIONE SU INSIEMI, ASSOLUTA CONTINUITÁ

Definizione. Se $f \in \mathcal{L}^1$ ed E é misurabile, $\int\limits_E f := \int\limits_X f\,\chi_E$

Proposizione 2. Sia $f \in \mathcal{L}^1$. Allora

(i) $A \subset B$, A, B misurabili $\Rightarrow \int\limits_A |f| \le \int\limits_B |f|$

(ii) $\int\limits_{\{f\ge c\}} f \ge c\ \mu(\{f \ge c\})\ \ \forall c$

(iii) $(\inf_A f)\ \mu(A) \le \int_A f \le (\sup_A f)\ \mu(A)$

(iv) $A_j \in \Sigma,\ A_i \cap A_j = \emptyset\ \ \forall\, i \ne j \ \Rightarrow\ \int_{\cup_j A_j} f = \sum_j \int_{A_j} f$

(v) $A_j \in \Sigma,\ A_j \subset A_{j+1}\ \forall j \ \Rightarrow\ \int_{A_j} f \to \int_{\cup_j A_j} f$

(vi) $A_j \in \Sigma,\ A_{j+1} \subset A_j\ \forall j \ \Rightarrow\ \int_{A_j} f \to \int_{\cap_j A_j} f$

Prova di (iv)-(vi). Sia $f \ge 0$. Ora, $A_i \cap A_j = \emptyset\ \forall i \ne j \Rightarrow f\chi_{\cup_j A_j} = \sum_j f\chi_{A_j} \Rightarrow$

$$\int_{\cup_j A_j} f = \int f\chi_{\cup_j A_j} = \int \sum_{j=1}^{\infty} f\,\chi_{A_j} \overset{\text{Levi}}{=} \sum_{j=1}^{\infty} \int f\chi_{A_j} = \sum_{j=1}^{\infty} \int_{A_j} f$$

Dunque, $\mu(E) := \int_E f,\quad E \in \Sigma$ é misura (finita: $\mu(X) = \int f < \infty$); in particolare valgono v) e vi). Infine, basta poi scrivere $\int_E f = \int_E f^+ - \int_E f^-$.

AC: Assoluta Continuitá dell'integrale: *Sia f sommabile. Allora*

$$(i)\quad \forall\, \epsilon > 0,\ \exists\ \delta_\epsilon > 0 :\ \mu(A) \le \delta_\epsilon \ \Rightarrow\ \int_A |f| \le \epsilon$$

$$(ii)\quad \forall \epsilon > 0,\ \exists A_\epsilon :\ \mu(A_\epsilon^c) < \infty \quad e \quad \int_{A_\epsilon} |f| \le \epsilon$$

Prova. (i) Per assurdo: $\exists \epsilon_0 > 0,\ \exists A_j$ tali che $\mu(A_j) \le \frac{1}{2^j}$ e $\int_{A_j} |f| \ge \epsilon_0$. Se $B := \cap_n \cup_{j\ge n} A_j$, risulta $\mu(B) = 0$ e $\int_B |f| = \lim_n \int_{\cup_{j\ge n} A_j} |f| \ge \epsilon_0$, contraddizione.

(ii) É $\{|f| = 0\} = \cap_{n=1}^{\infty} A_n$, ove $A_n := \{|f| \le \frac{1}{n}\}$. É $A_{n+1} \subset A_n$ e $\infty > \int |f| \ge \frac{1}{n}\mu(A_n^c)$. Basta allora osservare che $\int\limits_{A_n} |f| \to_n \int\limits_{|f|=0} |f| = 0$.

CONVERGENZA QUASI OVUNQUE, IN MISURA, IN MEDIA

Siano f_n, f funzioni misurabili in (X, Σ, μ). Diremo che f_n converge a f

quasi ovunque (q.o.) se $\exists N \in \Sigma : \ \mu(N) = 0$ e $f_n(x) \to f(x) \ \ \forall x \notin N$
in misura se $\forall \epsilon > 0, \quad \mu(\{x : |f_n(x) - f(x)| \geq \epsilon\}) \to_n 0$
in media se f_n, f sono sommabili e $\int_X |f_n - f| \, d\mu \to_n 0$.

Lemma
(i) $f_n \to f$ in media $\Rightarrow$ $f_n \to f$ in misura
(ii) $f_n \to f$ q.o. $\Rightarrow$ $f_n \to f$ in misura sugli insiemi di misura finita
(iii) $f_n \to f$ in misura $\Rightarrow$ $\exists n_k :$ $f_{n_k} \to f$ quasi ovunque
Prova. Posto $g_n := |f_n - f|$ proviamo (i)-(iii) per g_n $(g := 0)$
(i) Segue da: $\int g_n \geq \epsilon \mu(\{g_n \geq \epsilon\})$
(ii)-(iii) Cominciamo con osservare che $f_n(x)$ non tende a zero $\Leftrightarrow$ $(\exists \epsilon > 0 \, \forall n \, \exists k \geq n : \ f_k \geq \epsilon) \Leftrightarrow x \in \cup_{\epsilon>0} \cap_n \cup_{k \geq n} \{f_k \geq \epsilon\}$. Dunque

$$f_n \to 0 \quad q.o. \ in \ A \quad \Leftrightarrow \quad \mu(\cap_n \cup_{k \geq n} \{x \in A : \ f_k > \epsilon\}) = 0 \quad \forall \epsilon > 0$$

Chiaramente $\cup_{k \geq n} \{f_k \geq \epsilon\}$ é famiglia decrescente (in n) e quindi, se $\mu(A) < \infty$, $\mu(\cap_n \cup_{k \geq n} \{x \in A : \ f_k > \epsilon\}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mu(\cup_{k \geq n} \{x \in A : \ f_k > \epsilon\}) \to_n 0$.
In particolare, $f_n \to 0$ $q.o.$ in A $\Rightarrow$ $\mu(\{x \in A : \ f_n \geq \epsilon\}) \to 0 \quad \forall \epsilon > 0$, cioé f_n converge in misura in A.
Viceversa, se $f_n \to_n 0$ in misura, é vero che $\forall j, \, \exists n_j : \ \mu(\{f_n \geq \frac{1}{j}\}) \leq \frac{1}{2^j}, \ \forall n \geq n_j$. Sia $g_j = f_{n_j}$. Basta provare che $\mu(\cap_n \cup_{j \geq n} \{g_j > \epsilon\}) = 0 \quad \forall \epsilon > 0$ per dedurre che $g_j \to 0$ $q.o.$ Basta provare che $\mu(\cup_{j \geq n} \{ g_j > \epsilon\}) \to_n 0 \quad \forall \epsilon > 0$. Ma

$$\frac{1}{n} \leq \epsilon, j \geq n \quad \Rightarrow \quad \mu(\cup_{j \geq n} \{ g_j > \epsilon\}) \leq \mu(\cup_{j \geq n} \{ g_j > \frac{1}{j}\}) \leq \sum_{j \geq n} \frac{1}{2^j} \to_n 0$$

Nota. Unicitá del limite: se f_n converge a f e a g q.o. (oppure in misura, oppure in media) allora $\mu(\{x : |f(x) - g(x)| \neq 0\}) = 0$, (si dice $f = g$ q.o.)

CONTROESEMPI
(i) Convergenza in misura (oppure q.o.) non implica convergenza in media: $X = \mathbf{R}$ con la misura di Lebesgue e $f_n = n\chi_{(0, \frac{1}{n}]}$; f_n converge a zero in misura (e puntualmente), ma $\int_{\mathbf{R}} f_n = 1$.
(ii) Convergenza in misura non implica convergenza q.o.: $f_{n,k} = \chi_{[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}]}$, ove, dato $n \in \mathbf{N}$, k va da 1 fino ad n, converge a zero in misura ma non converge in alcun punto (in ogni punto il massimo limite é 1 ed il minimo limite é zero).
(iii) Convergenza q.o. non implica in misura: $f_n = \chi_{[n,n+1]}$ converge a zero q.o. (e, sugli intervalli limitati, anche in misura), ma non converge in misura su tutto $\mathbf{R}$.

Teorema 1 (Lebesgue) *Siano $f_n \in \mathcal{L}^1$. Se f_n é equidominata e f_n converge ad f in misura, allora $f \in \mathcal{L}^1$ ed f_n converge a f in media.*

Prova. Sia $g_n = |f_n - f|$. Se g_n non converge in media a zero, esistono n_k ed $\epsilon > 0$ tali che $\int g_{n_k} \geq \epsilon$ e quindi g_{n_k} non ha estratte convergenti in media a zero. Ma g_{n_k} converge a zero in misura, e quindi una sua sottosuccessione converge q.o., e quindi in media, azero.

CONVERGENZA IN MISURA E TEOREMA DI VITALI

Se $\int |f_n - f| \to 0$, le proprietá (i)-(ii) in AC valgono **uniformemente** in n:

$$(k) \qquad \forall\, \epsilon > 0, \qquad \exists \delta_\epsilon > 0 : \quad E \in \Sigma, \qquad \mu(E) \leq \delta_\epsilon \qquad \Rightarrow \qquad \sup_n \int_E |f_n| \leq \epsilon$$
$$(kk) \qquad \forall \epsilon > 0, \qquad \exists E_\epsilon \in \Sigma : \qquad \mu(E_\epsilon) < \infty \qquad \text{e} \qquad \sup_n \int_{E_\epsilon^c} |f_n| \leq \epsilon$$

Infatti, $\int_E |f_n| \leq \int |f_n - f| + \int_E |f| \leq 2\epsilon$ se $n \geq n_\epsilon$ e $\mu(E) \leq \delta_{\epsilon,f}$ mentre $\int_E |f_j| \leq \epsilon$ per $j = 1, \ldots, n_\epsilon$ se $\mu(E) \leq \delta_{\epsilon, f_1, \ldots, f_{n_\epsilon}}$. Analogamente, se $\int_{E_\epsilon^c} |f| \leq \frac{\epsilon}{2}$ allora

$$\int_{E_\epsilon^c} |f_n| \leq \int_{E_\epsilon^c} |f_n - f| + \int_{E_\epsilon^c} |f| \leq \epsilon \quad \text{se} \quad n \geq n_\epsilon$$

mentre $\int_{E_{j,\epsilon}^c} |f_j| \leq \epsilon$ per $j = 1, \ldots, n_\epsilon$ per certi $E_{j,\epsilon}$ di misura finita e quindi, posto $F_\epsilon = E_\epsilon \cup_j E_{j,\epsilon}$ risulta $\int_{F_\epsilon^c} |f_n| \leq \epsilon$.

TEOREMA DI CONVERGENZA DI VITALI .

Siano f_n sommabili e convergenti in misura ad f. Se valgono (k) e (kk), allora f é sommabile e $\int |f_n - f| \to 0$.

Prova. Dalla Prop. 1-(ii) segue che $\exists f_{n_k} \to_k f$ q.o. e quindi (Lemma di Fatou): $\int_E |f| \leq \underline{\lim} \int_E |f_{n_k}| \leq \sup_n \int_E |f_n| \quad \forall E \in \Sigma$. Siano δ_ϵ, E_ϵ come in $(k) - (kk)$. Sia $E_{\epsilon,n} := \{x \in E_\epsilon : |f_n(x) - f(x)| \geq \frac{\epsilon}{\mu(E_\epsilon)}\}$. Ora, $f_n \to f$ in misura, $n \geq n_\epsilon \Rightarrow \mu(E_{\epsilon,n}) \leq \delta_\epsilon \Rightarrow \int\limits_{E_\epsilon^c \cup E_{\epsilon,n}} |f| \leq \sup_n \int\limits_{E_\epsilon^c \cup E_{\epsilon,n}} |f_n| \leq 2\epsilon$, mentre

$$\int_{E_\epsilon \setminus E_{\epsilon,n}} |f| \leq \int_{E_\epsilon \setminus E_{\epsilon,n}} |f - f_n| + \int_{E_\epsilon \setminus E_{\epsilon,n}} |f_n| \leq \epsilon + \int |f_n|$$

e, infine, $n \geq n_\epsilon \quad \Rightarrow$

$$\int |f_n - f| = \int_{E_\epsilon^c \cup E_{\epsilon,n}} |f_n - f| + \int_{E_\epsilon \setminus E_{\epsilon,n}} |f_n - f| \leq 4\epsilon + \int_{E_\epsilon \setminus E_{\epsilon,n}} \frac{\epsilon}{\mu(E_\epsilon)} = 5\epsilon$$

NOTA. Nel Teorema di Vitali l'ipotesi 'f_n converge a f in misura' puó essere sostituita dalla 'f_n converge a f q.o., giacché la convergenza q.o. implica la convergenza in misura sull'insieme di misura finita E_ϵ.

SPAZI L^p

Sia μ misura su X, $p \geq 1$. $\mathcal{L}^p = \mathcal{L}^p(X,\mu) := \{f \in \mathcal{M} : \int_X |f|^p \, d\mu < \infty\}$

Siccome $p \geq 1 \Rightarrow (\frac{|t|+|s|}{2})^p \leq \frac{|s|^p+|t|^p}{2} \quad \forall\, s,t \in \mathbf{R}$, é

$$f,\, g \in \mathcal{L}^p \quad \Rightarrow \quad f+g \in \mathcal{L}^p$$

e quindi, facilmente, $\mathcal{L}^p$ **é spazio vettoriale**. Nel seguito, L^p indicherá $\mathcal{L}^p$ quozientato rispetto al sottospazio $N := \{f = 0 \ q.o.\}$.

$\rightarrow$ Se $X = \mathbf{N}$ e μ é la misura che conta, $l^p := L^p(X,\mu)$ é lo spazio delle successioni $a := (a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ di potenza p-esima sommabile con norma $\|a\| = [\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p]^{\frac{1}{p}}$

DISEGUAGLIANZE di HOLDER, di MINKOWSKII .

Siano f, g misurabili. Se $p \geq 1$, allora

$$(\int |f + g|^p)^{\frac{1}{p}} \leq (\int |f|^p)^{\frac{1}{p}} + (\int |g|^p)^{\frac{1}{p}} \qquad \textbf{(Minkowskii)}$$

Se $p,q > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (i.e. p,q **sono 'esponenti coniugati'***), allora*

$$\int |f\,g| \leq (\int |f|^p)^{\frac{1}{p}} \ (\int |g|^q)^{\frac{1}{q}} \qquad \textbf{(Holder)}$$

Una elementare diseguaglianza di convessitá.

$$p,\, q > 1, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \quad \Rightarrow \quad s\,t \leq \frac{t^p}{p} + \frac{s^q}{q} \qquad \forall\ s,\, t \geq 0$$

Da $\frac{d}{dr}(\frac{r^p}{p} - r + \frac{1}{q}) = r^{p-1} - 1$ segue che $r = 1$ é punto di minimo assoluto. Da $\frac{r^p}{p} - r + \frac{1}{q} = 0$ in $r = 1$, segue $r \leq \frac{1}{p} r^p + \frac{1}{q} \ \ \forall r > 0$. Scrivendo (se $s \neq 0$) $r = \frac{t}{s^{q-1}}$ si ottiene la diseguaglianza voluta.

Holder segue ponendo $t = \frac{|f(x)|}{(\int |f|^p)^{\frac{1}{p}}}$, $s = \frac{|g(x)|}{(\int |g|^p)^{\frac{1}{p}}}$ e integrando. Minkowskii segue da Holder: $\frac{1}{p} + \frac{p-1}{p} = 1 \Rightarrow |f+g|^p \leq |f+g|^{p-1}\ |f| + |f+g|^{p-1}\ |g|$

$$\Rightarrow \quad \int |f+g|^p \leq (\int |f+g|^p)^{\frac{p-1}{p}} \ (\int |f|^p)^{\frac{1}{p}} + (\int |f+g|^p)^{\frac{p-1}{p}} \ (\int |g|^p)^{\frac{1}{p}}$$

COMPLETEZZA degli spazi L^p. Sia $p \geq 1$.

(i) $\|f\|_p := (\int_X |f|^p \, d\mu)^{\frac{1}{p}}$ é una norma su L^p.

(ii) L^p dotato di tale norma é uno **spazio di Banach**, ovvero

$$f_n \in L^p, \ \|f_n - f_m\|_p \to_{n,\, m \to \infty} 0 \ \Rightarrow \ \exists f \in L^p : \ \|f_n - f\|_p \to 0$$

Si prova esattamente come nel caso $p = 1$: sia $g_k := f_{n_k}$ tale che $\|g_{k+1} - g_k\|_p \leq \frac{1}{2^k}$. Posto $F_n := \sum_1^n |g_{k+1} - g_k|$, é $\|F_n\|_p \leq \sum_1^n \frac{1}{2^k} \leq 1 \quad \forall n$ e quindi $F(x) := \lim_n F_n$ é in L^p per il Teorema di Levi, e quindi

$$\sum_1^\infty |g_{k+1} - g_k| < +\infty \quad \text{q.o.}$$

$$f(x) := \lim_k [g_1 + (g_2 - g_1) + \ldots + (g_k - g_{k-1})] = \lim_k f_{n_k} \quad \text{esiste finito q.o.}$$

Inoltre $|f_{n_k}| \leq F + |g_1|$ e quindi $|f_{n_k}|^p$ é equidominata e quindi $\int |f_{n_k} - f|^p \to 0$.

Infine, essendo f_n di Cauchy in L^p, $\int |f_n - f|^p \to 0$.

DISEGUAGLIANZA di INTERPOLAZIONE .

Siano $1 \leq p \leq q$, $\theta \in [0,1]$ tale che $\frac{1}{r} = \frac{\theta}{p} + \frac{1-\theta}{q}$. Allora

$$f \in L^p \cap L^q \ \Rightarrow \ f \in L^r \ \forall r \in [p,q] \ \text{ e } \ \|f\|_r \leq \|f\|_p^\theta \, \|f\|_q^{1-\theta}$$

Infatti, $\frac{p}{\theta r}$ e $\frac{q}{(1-\theta) r}$ sono esponenti coniugati e quindi

$$\int |f|^r = \int |f|^{r\theta} \, |f|^{r(1-\theta)} \leq (\int |f|^p)^{\frac{r\theta}{p}} \, (\int |f|^q)^{\frac{r(1-\theta)}{q}}$$

DISEGUAGLIANZA di HOLDER GENERALIZZATA .

Siano $f \in L^p, g \in L^q$. Allora

$$\frac{1}{r} := \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \leq 1 \ \Rightarrow \ \|fg\|_r \leq \|f\|_p \, \|g\|_q$$

Basta applicare Holder con esponenti $\frac{p}{r}$ e $\frac{q}{r}$:

$$\int |f|^r \, |g|^r \leq (\int |f|^p)^{\frac{r}{p}} \, (\int |g|^q)^{\frac{r}{q}}$$

Esercizi e complementi 3

Teorema di Egoroff.

Sia $\mu(X) < \infty$. Siano f_n misurabili tali che $f_n(x) \to 0 \ \ \forall x$. Provare che

$$\forall \epsilon > 0, \exists A_\epsilon \text{ misurabile } : \mu(A_\epsilon) \le \epsilon \text{ e } f_n \to 0 \quad \text{uniformemente in} A \setminus A_\epsilon$$

Suggerimento. Provare che $\forall j, \epsilon,\ \exists n(\epsilon, j) :\ \mu(\cup_{n \ge n(\epsilon,j)}\{g_n \ge \frac{1}{j}\}) \le \frac{\epsilon}{2^j}$ *e considerare* $A_\epsilon := \cup_j \ \cup_{n \ge n(\epsilon,j)} \{g_n \ge \frac{1}{j}\}$

Funzioni sommabili

Esercizio 1. Sia f Lebesgue sommabile in $\mathbf{R}^N$.

Sia $\quad f_h(x) := f(x-h),\ \ h \in \mathbf{R}^N.$ Provare che

$$\int_{\mathbf{R}^N} f_h(x)dx \ = \int_{\mathbf{R}^N} f(x)dx$$

Suggerimento. Provarlo dapprima per le funzioni semplici..

Esercizio 2. Sia f sommabile in $\mathbf{R}$. Provare che

(i) $\ \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(x+k)$ converge assolutamente quasi per ogni $x \in \mathbf{R}$

(ii) $\ g := \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(x+k)$ è 1-periodica e sommabile in $[a,b] \quad \forall a < b$

Suggerimento. Considerare $\sum_{-\infty}^{+\infty} \int_{\mathbf{R}} f_k \chi_{[0,1]},\ \ f_k(x) :=\ f(x+k)$

Esercizio 3. Provare che la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} (\cos nx)^{n^4}$ converge quasi per ogni $x \in [-\pi, \pi]$ e diverge in un insieme denso in $[-\pi, \pi]$.

Suggerimento. Considerare $\sum_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos nx)^{n^4} dx$

Esercizio 4. Sia $\quad n \to r_n$ biiezione di $\mathbf{N}$ su $\mathbf{Q}$.

Provare che $\quad \sum_n \frac{1}{2^n \sqrt{|x - r_n|}} \ < \ \infty \qquad$ per quasi tutti gli $x \in \mathbf{R}$.
Suggerimento: Considerare $\quad \int_a^b (\sum_n \frac{1}{2^n \sqrt{|x-r_n|}}) \ \ a < b.$

Convergenza in misura, q.o., in media

Esercizio 1. Sia $f_n(x) := |\sin(k_n x + t_n)|^{p_n},\ x \in (0, 2\pi),\ k_n \in \mathbf{N}, p_n \to +\infty$. Provare che f_n converge a zero in misura.

Sugg. Confrontare $L^1(\{x : |\sin(k_n x + t_n)|^{p_n} \geq \epsilon\})$ *con* $L^1(\{x : |\sin x|^{p_n} \geq \epsilon\}$

Esercizio 2. Discutere convergenza puntuale, uniforme, in media, in misura per
$(i) f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2},\ x \in (0,1),\quad f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2},\ x \in (1, +\infty)$
$(ii) f_n(x) = nxe^{-nx^2},\ x \in (0,1),\quad f_n(x) = nxe^{-nx^2},\ x \in (1, +\infty)$
$(iii) f_n(x) = \frac{n^2x^2}{n^4+x^2},\ x \in (1, +\infty)$
$(iv) f_n(x) = \frac{nx}{(1+n^2x^4)\log(n+1)}$

Esercizio 3. Siano f_n, g misurabili in $\mathbf{R}$, $|f_n(x)| \leq g(x)$ per quasi tutti gli x. Provare che $L^1(\{g \geq \epsilon\}) < \infty\ \ \forall \epsilon > 0,\ \ f_n \to 0\ q.o. \Rightarrow f_n \to 0$ in misura

Suggerimento. $L^1(\{|f_n| \geq \epsilon\}) \leq L^1(\{|g(x)| \geq \epsilon\})$*....*

Esercizio 4. Sia $\Phi : \mathbf{N} \to \mathbf{Q} \cap [0,1]$ biiezione. Siano

$$\Phi(k) = \frac{m_k}{n_k}, m_k, n_k \quad \text{primi tra loro} \qquad f_k(x) = e^{-(m_k - n_k x)^2}, x \in [0,1]$$

Provare che f_k tende a zero in misura, mentre $\lim f_k(x)$ non esiste per alcun x.

Suggerimento. Trovare le x che soddisfano la diseguaglianza $(m_k - n_k x)^2 \leq \log \frac{1}{\epsilon}$. *Usare poi il fatto che per ogni x esistono razionali* m_k, n_k *tali che* $|x - \frac{m_k}{n_k}| \leq \frac{1}{n_k^2}$. *Considerare a parte il caso x razionale.*

Esercizio 5. (i) Trovare f_n misurabili tali che $f_n \to 0$ in misura ma $\int |f_n| \geq 1$
(ii) Trovare f_n misurabili tali che $f_n \to 0$ q.o. ma $\int |f_n| \geq 1$
(iii) Trovare f_n misurabili tali che $f_n \to 0$ q.o. ma non in misura
(iv) Trovare $f_n : [0,2] \to \mathbf{R}$ tali che $f_n(x) \to 0\ \forall x$ ma non in misura
Suggerimento. $f_n = \chi_{\cup_{j \geq n}}(Z + q_j)$...

Esercizio 6 . Sia $\mu(X) < \infty$. Siano $f_n \geq 0$ funzioni sommabili. Provare che

$$\sup_n \int f_n < +\infty,\ \ f_n \to f\ \ q.o.,\ \ \int_X f_n\, d\mu\ \to\ \int_X f\, d\mu \quad \Rightarrow \quad \|f_n - f\|_{L^1} \to 0$$

Suggerimento: $A_{n,\epsilon} := \{x : |f_n(x) - f(x)| \geq \epsilon\} \quad \Rightarrow$
$\int |f_n - f| \leq \int_{A_{n,\epsilon}} |f_n - f| + \epsilon\mu(X),\quad \circ(1) - \epsilon\mu(X) \leq \int_{A_{n,\epsilon}} f_n \leq \circ(1) + \epsilon\mu(X)$

Spazi L^p

Esercizio 1. Siano $p_i > 1$, $\frac{1}{p_1} + \ldots + \frac{1}{p_l} = \frac{1}{p} \leq 1$. Siano $f_1, \ldots, f_l$ misurabili. Provare che $(\int |f_1 \ldots f_l|^p)^{\frac{1}{p}} \leq (\int |f_1|^{p_1})^{\frac{1}{p_1}} \ldots (\int |f_l|^{p_l})^{\frac{1}{p_l}}$

Esercizio 2 . Data f Lebesgue misurabile in $\mathbf{R}^n$, $t > 0$, sia $f_t(x) = f(tx)$. Provare che
(i) f_t è misurabile, (ii) $f \in L^p \Rightarrow f_t \in L^p$ e $||f_t||_p = t^{-\frac{n}{p}} ||f||_p$

Esercizio 3. Siano $f_n \in L^p(X)$ tali che $\sup_n \int_X |f_n|^p < +\infty$. Provare che $\liminf |f_n| \in L^p$, mentre può accadere che $\int \limsup |f_n| = +\infty$.

Esercizio 4. Sia $\mu(X) < +\infty$. Siano $1 \leq s < t$. Provare che

(i) $f \in L^t \Rightarrow f \in L^s$, e l'inclusione $L^t \subset L^s$ è stretta
(ii) l'inclusione $L^t \subset L^s$ è falsa se $\mu(X) = +\infty$.

Esercizio 5. Sia f_n successione limitata in $L^p(\mathbf{R}^n)$, $p \geq 1$. Provare che

$$f_n \to f \quad q.o., \quad \int |f_n|^p \to \int |f|^p \quad \Rightarrow \quad \|f_n - f\|_p \to 0$$

Esercizi sugli L^p: cenni di soluzione

Esercizio 2 . E misurabile, $A \subset tE$, $B \subset tE^c \Rightarrow$

$$\tfrac{1}{t}A \subset E, \ \tfrac{1}{t}B \subset E^c \ \Rightarrow \ \mu(A \cup B) = t^n \mu(\tfrac{1}{t}A \cup B) = t^n[\mu(\tfrac{1}{t}A) + \mu(\tfrac{1}{t}B)] = \mu(A) + \mu(B) \Rightarrow tE \text{ é misurabile.}$$

Inoltre, $\chi_E(tx) = \chi_{\frac{1}{t}E}$ é misurabile e $\int \chi_E(tx)d\mu(x) = \mu(\frac{1}{t}E) = (\frac{1}{t})^n \mu(E) = t^{-n} \int \chi_E$. Infine, se $0 \leq f$ é misurabile e $0 \leq \varphi_j \leq \varphi_{j+1} \leq f$, allora

$$\int f^p(tx)d\mu(x) = \lim_j \int \varphi_j^p(tx)d\mu(x) = t^{-n} \int f^p$$

Esercizio 5. Dallle ipotesi ed usando Fatou segue che, se E é misurabile

$$\int |f|^p - \overline{\lim}_n \int_E |f_n|^p = \underline{\lim}_n[\int |f_n|^p - \int_E |f_n|^p] \geq \int_{E^c} |f|^p$$

e quindi $\overline{\lim}_n \int_E |f_n|^p \leq \int_E |f|^p$ e quindi, di nuovo per Fatou, $\lim_n \int_E |f_n|^p = \int_E |f|^p$. Ció assicura l'uniforme assoluta continuitá degli integrali e quindi l'applicabilitá del Teorema di Vitali, e quindi $\|f_n - f\|_p \to_n 0$.

Funzioni sommabili: cenni di soluzione

Esercizio 2 Per Beppo Levi e numerabile additivitá dell'integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\sum_{-\infty}^{+\infty}|f(x+k)|\chi_{[0,1]}\right]dx=\sum_{-\infty}^{+\infty}\int_0^1|f(x+k)|dx=\sum_{-\infty}^{+\infty}\int_k^{k+1}|f(t)|dt=\int_{-\infty}^{+\infty}|f|<+\infty$$

Dunque $\sum_{-\infty}^{+\infty}|f(x+k)|<+\infty$ per quasi ogni $x\in[0,1]$. Siccome $\sum_{-\infty}^{+\infty}|f(x+n+k)|=\sum_{-\infty}^{+\infty}|f(x+k)|\quad\forall n\in\mathbf{Z}$ é infatti $\sum_{-\infty}^{+\infty}|f(x+k)|<+\infty$ per quasi ogni $x\in\mathbf{R}$ e tale funzione é per l'appunto 1-periodica.

Infine $\int_0^1|\sum_{-\infty}^{+\infty}f(x+k)|dx\le\int_{\mathbf{R}}|f|<+\infty$ e quindi, per periodicitá, g é sommabile su ogni intervallo limitato.

Esercizio 3 Effettuando un cambio di variabile ed utilizzando la periodicitá del coseno, troviamo

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos nx)^{n^4}dx=\frac{1}{n}\int_0^{n\frac{\pi}{2}}(\cos t)^{n^4}dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos t)^{n^4}dt$$

Siccome $\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos t)^n dt=O(\frac{1}{\sqrt{n}})$, vediamo che $\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos t)^{n^4}dt=O(\frac{1}{n^2})$ e quindi, per Beppo Levi

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\sum_{-\infty}^{+\infty}(\cos nx)^{n^4}\right]dx=\sum_{-\infty}^{+\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos nx)^{n^4}dx<+\infty$$

Dunque $\sum_{-\infty}^{+\infty}(\cos nx)^{n^4}<+\infty$ quasi per ogni $x\in[0,\frac{\pi}{2}]$ ed infatti, per periodicitá, quasi per ogni x. Infine la serie diverge in ogni $x=\frac{2k\pi}{l},\ k,l\in\mathbf{N}$.

Esercizio 4. $\int_{-M}^{M}\frac{dx}{\sqrt{|x-r_n|}})\le 8\int_0^M\frac{dt}{\sqrt{t}}=16\sqrt{M}\quad\Rightarrow$

$$\sum_n\int_{-M}^{M}\frac{1}{2^n\sqrt{|x-r_n|}}\le 16\sqrt{M}\quad\Rightarrow\quad\int_{-M}^{M}[\sum_n\int_{-M}^{M}\frac{1}{2^n\sqrt{|x-r_n|}}]dx<\infty$$

$$\Rightarrow\quad\sum_n\frac{1}{2^n\sqrt{|x-r_n|}}<+\infty\quad\text{q.o.}x$$

Convergenza in media, q.o., in misura: cenni di soluzione

Esercizio 6 . Sia $I:=\int f,\quad A_{n,\epsilon}:=\{x:|f_n(x)-f(x)|\ge\epsilon\}$. Intanto

$\mu(X)<\infty, f_n\to f\quad q.o.\quad\Rightarrow\quad f_n\to f$ in misura $\Rightarrow\quad\mu(A_{n,\epsilon})\to_n 0$

Quindi $\int_{A_{n,\epsilon}}f\to_n 0$ (assoluta continuitá dell'integrale) e quindi

$$\int|f_n-f|\le\int_{A_{n,\epsilon}}|f_n-f|+\epsilon\mu(X)\le 2\epsilon\mu(X)+\int_{A_{n,\epsilon}}f_n\quad\forall n\ge n_\epsilon.\quad\text{Ma}\quad\int_{A_{n,\epsilon}}f_n=$$

$$=I+\circ(1)-\int_{A^c_{n,\epsilon}}f_n\le I+\circ(1)-\int_{A^c_{n,\epsilon}}(f-\epsilon)\le\epsilon\mu(X)+\int_{A_{n,\epsilon}}f\le 2\epsilon\mu(X)\quad\forall n\ge n_\epsilon$$