AM310- I Settimana 2012

Definizione 1: Misure "esterne".

Dato un insieme X, sia $\quad \mathcal{P}(X) := \{A : \; A \subset X\} \quad$ l'insieme delle parti di X.

Una funzione $\mu : \mathcal{P}(X) \to [0, +\infty]$, si chiama misura (esterna), se $\quad \mu(\emptyset) = 0 \quad$ e

$$A \subset \cup_{j=1}^{+\infty} A_j \;\; \Rightarrow \;\; \mu(A) \le \sum_{j=1}^{+\infty} \mu(A_j) \qquad \textbf{(numerabile subadditivitá)}$$

$! \to !$ $\quad \mu$ é **monotona**: $\quad A \subset B \quad \Rightarrow \quad \mu(A) \; \le \mu(B)$.

Generazione di misure esterne.

1. Sia $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$, con $\emptyset, X \in \mathcal{A}$. Sia $\quad \rho : \mathcal{A} \to [0, +\infty], \quad \rho(\emptyset) = 0. \quad$ Se

$$\forall A \subset X, \qquad \mu(A) := \inf\{\sum_{j=1}^{+\infty} \rho(A_j) \; : \; A \subset \cup_j A_j \quad A_j \in \mathcal{A}\}$$

allora μ é misura esterna in X (che prolunga ρ se ρ é numerabilmente subadditiva).

2. Siano $\mu_\alpha, \alpha \in \mathcal{I}$ misure esterne su X. Allora

$$\mu(A) := \sup\{\mu_\alpha(A) : \quad \alpha \in \mathcal{I}\}, \qquad A \subset X$$

é misura esterna su X.

Prova di 1. Sia $A \subset \cup_j A_j$. Nel provare che $\mu(A) \le \sum_j \mu(A_j)$, possiamo evidentemente supporre che $\mu(A_j) < \infty \; \forall j$. Fissato ϵ, esistono dunque

$$A_j \subset \cup_i A_{ij} \quad \text{tali che} \quad \sum_i \rho(A_{ij}) \le \mu(A_j) + \frac{\epsilon}{2^j}$$

Siccome $\; A \subset \cup_{ij} A_{ij}$, allora $\; \mu(A) \le \sum_{ij} \rho(A_{ij}) \le \epsilon + \sum_j \mu(A_j) \quad \forall \epsilon > 0$.

Prova di 2.

$$A \subset \cup_j A_j, \mu_\alpha(A) \le \sum_j \mu_\alpha(A_j) \le \sum_j \mu(A_j) \, \forall \alpha \Rightarrow \mu(A) = \sup_\alpha \mu_\alpha(A) \le \sum_j \mu(A_j)$$

Esempi: le misure (esterne) di Lebesgue e di Hausdorff in $\mathbf{R}^N$

Misura di Lebesgue. Qui $R = I_1 \times \ldots \times I_N$, I_j intervalli in $\mathbf{R}$, denota un rettangolo in $\mathbf{R}^N$, e $\text{Vol}(R) = l(I_1) \times \ldots \times l(I_N)$ é il suo volume ($l(I)$:= lunghezza di I, $0\infty := 0$). La misura di Lebesgue L^N é generata dalla funzione volume ($\rho(R) := Vol(R)$):

$$L^N(A) := \inf\{\sum_1^{+\infty} \text{Vol}(R_j) \ : \ A \subset \cup_j R_j\}, \quad A \subset \mathbf{R}^N$$

Per quanto visto sopra, L^N é misura esterna.
NOTA. $L^N(R) = \text{Vol}(R)$ per ogni rettangolo R.

Misura di Hausdorff s-dimensionale. Dati $s \geq 0$, $\delta > 0 A \subset \mathbf{R}^n$, siano

$$H^s_\delta(A) = \inf\{\sum_{j=1}^{+\infty} (\text{diam } C_j)^s \ : \ A \subset \cup_{j=1}^{+\infty} C_j, \ C_j = \overline{C}_j, \ \text{diam} C_j \leq \delta\}$$

$$H^s(A) = \sup_{\delta > 0} H^s_\delta(A)$$

Per quanto sopra, H^s é misura esterna (di Hausdorff s-dimensionale).

Dalla invarianza per traslazione e dalla 1-omogeneitá della distanza in $\mathbf{R}^N$ segue

Invarianza per traslazione, omogeneitá.

$$L^N(A + h) = L^N(A), \quad L^N(tA) = t^N L^N(A) \ \ \forall A \subset \mathbf{R}^N, \ \ h \in \mathbf{R}^N, t \geq 0$$

$$H^s(A + h) = H^s(A), \quad H^s(tA) = t^s H^s(A) \ \ \forall A \subset \mathbf{R}^N, \ \ h \in \mathbf{R}^N, t \geq 0$$

$NOTA : L^N$ **non é additiva**. Sia N=1, $A_x := (x + \mathbf{Q}) \cap [0, 1]$. É

$$x - y \notin \mathbf{Q} \Rightarrow A_x \cap A_y = \emptyset, \quad x - y \in \mathbf{Q} \Rightarrow A_x = A_y$$

Dall'assioma della scelta: $\exists Z \subset \mathbf{R}$ tale che $\forall \ x :$ $Z \cap A_x$ é un punto.
Proprietá di Z:

$$\cup_{q \in \mathbf{Q}} (Z + q) = \mathbf{R}, \quad q_1 \neq q_2 \Rightarrow (Z + q_1) \cap (Z + q_2) = \emptyset$$

Sia poi $\alpha : \mathbf{N} \to \mathbf{Q}$ biiezione, $q_j := \alpha(j)$. Da Ł$^1(\mathbf{R}) \leq \sum_j L^1(Z + q_j) = \sum_j L^1(Z)$, segue $L^1(Z) > 0$. Sia infine $q_{j_k} \in [0, 1] \, \forall k$ e quindi $2 = L^1([0, 2]) \geq L^1(\cup_1^n (Z + q_{i_k}))$. Se $L^1(\cup_1^n (Z + q_{i_k})) = \sum_1^n L^1(Z + q_{j_k}) = nL(Z)$, deve essere $n \leq \frac{2}{L^1(Z)}$.

Definizione 2: $\sigma-$**algebre, misure**.

Dato un insieme X, una famiglia Σ di sottoinsiemi di X si chiama σ-algebra se

$$(i)\ \ \emptyset \in \Sigma, \qquad (ii)\ \ E \in \Sigma \Rightarrow E^c \in \Sigma, \qquad (iii)\ \ E_j \in \Sigma \Rightarrow \cup_{j=1}^{+\infty} E_j \in \Sigma$$

Una funzione $\mu : \Sigma \to [0, +\infty]$, si chiama misura se: $\quad \mu(\emptyset) = 0 \quad$ e

$$E_j \in \Sigma, E_i \cap E_j = \emptyset \ \ \forall i \neq j \quad \Rightarrow \quad \mu(\cup_{j=1}^{+\infty} E_j) = \sum_{j=1}^{+\infty} \mu(E_j) \quad \textbf{(numerabile additivitá)}$$

!! →!! Siccome $A \setminus B = (A^c \cup B)^c$, $\cap_j A_j = (\cup_j A_j^c)^c$, si ha che

$$A, B \in \Sigma \ \Rightarrow \ A \setminus B \in \Sigma, \qquad\qquad A_j \in \Sigma \ \Rightarrow \ \cap_j A_j \in \Sigma$$

Nota. Se $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$,

$$\mathcal{S}_{\mathcal{A}} := \bigcap_{\mathcal{S}\sigma-algebra,\ \mathcal{A}\subset\mathcal{S},} \mathcal{S}$$

é la piú piccola σ-algebra contenente $\mathcal{A}$ (σ-algebra generata da $\mathcal{A}$).

Misura associata ad una misura esterna: Insiemi misurabili

Sia μ misura (esterna) su X. Diremo che $\quad E \subset X$ è μ-**misurabile** se

$A \subset E,\ B \subset E^c \ \Rightarrow \ \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) \quad$ ovvero se $\quad \forall A \subset X$ si ha

$\mu(A) = \mu(A \cap E) + \mu(A \cap E^c)$. $\qquad \Sigma_\mu$ denoterá **la classe dei** μ-**misurabili**.

! →!(i) $\ \mu(E) = 0 \quad \Rightarrow \quad E \in \Sigma_\mu \quad$ e, se $\quad E\Delta F := (E \setminus F) \cup (F \setminus E), \quad$ allora $F \in \Sigma_\mu, \quad \mu(E\Delta F) = 0 \quad \Rightarrow \quad E \in \Sigma_\mu$.

! →!(ii) $\ E \subset \mathbf{R}^n$ é (Lebesgue) misurabile $\Rightarrow$ $E + h$, $\quad tE$ sono (Lebesgue) misurabili.

Proposizione 1 : $\mu_{|\Sigma_\mu}$ **é una misura**, ovvero

(i) $E_j \in \Sigma_\mu, E_i \cap E_j = \emptyset \ \forall i \neq j \Rightarrow \mu(\cup_{j=1}^{+\infty} E_j) = \sum_{j=1}^{+\infty} \mu(E_j)$

(ii) Σ_μ è una σ-algebra

Prova di (i): $E \in \Sigma_\mu,\ A \cap E = \emptyset\ \Rightarrow\ \mu(A \cup E) = \mu(A) + \mu(E)$. Dall'ipotesi segue quindi $\mu(\cup_{i=1}^n E_i) = \sum_1^n \mu(E_i), \forall n$ e quindi

$$\sum_1^{+\infty} \mu(E_i) \geq \mu(\cup_{i=1}^{+\infty} E_i) \geq \mu(\cup_{i=1}^n E_i) = \sum_1^n \mu(E_j) \quad \forall n$$

Prova di (ii) : Intanto, $\emptyset \in \Sigma_\mu$ e $E \in \Sigma_\mu \Leftrightarrow E^c \in \Sigma_\mu$. Poi, $E_1, E_2 \in \Sigma_\mu \Rightarrow \mu(A \cap (E_1 \cup E_2)) = \mu([A \cap E_1) \cup (A \cap E_2)] \cap E_1) + \mu([A \cap E_1) \cup (A \cap E_2)] \cap E_1^c) = \mu(A \cap E_1) + \mu(A \cap E_1^c \cap E_2) \Rightarrow \mu(A) = \mu(A \cap E_1) + \mu(A \cap E_1^c \cap E_2) + \mu(A \cap E_1^c \cap E_2^c) = \mu(A \cap (E_1 \cup E_2)) + \mu(A \cap (E_1 \cup E_2)^c) \Rightarrow E_1 \cup E_2 \in \Sigma_\mu$.
In particolare, $E, F \in \Sigma_\mu \ \Rightarrow\ E \setminus F = (E^c \cup F)^c \in \Sigma_\mu$ e quindi $F_1 := E_1$ e $F_{n+1} := E_{n+1} \setminus \cup_{j=1}^n E_j$ sono misurabili. Siccome $\cup_{j=1}^n F_j = \cup_{j=1}^n E_j$ si deduce che gli F_n sono tutti disgiunti e la loro unione uguaglia l'unione degli E_n. Sostituendo eventualmente gli E_n con gli F_n, possiamo supporre gli E_j tra loro disgiunti.
Ora, dalla misurabilitá di $\cup_{j=1}^n E_j$ segue che $\mu(A) \geq \mu(A \cap (\cup_1^n E_i)) + \mu(A \cap (\cup_{i=1}^{+\infty} E_i)^c)$.
Ma, essendo gli E_j misurabili e disgiunti, é $\mu(A \cap (E_1 \cup E_2)) = \mu(A \cap E_1) + \mu(A \cap E_2)$ e quindi, iterando, $\mu(A \cap (\cup_1^n E_j)) = \sum_{i=1}^n \mu(A \cap E_i)$. Dunque , passando al limite

$$\mu(A) \geq \sum_{i=1}^{+\infty} \mu(A \cap E_i) + \mu(A \cap (\cup_{i=1}^{+\infty} E_i)^c) \geq \mu(A \cap (\cup_{i=1}^{+\infty} E_i)) + \mu(A \cap (\cup_{i=1}^{+\infty} E_i)^c)$$

○ **ESEMPIO di un insieme in R che non é Lebesgue misurabile**.

É l'insieme Z sopra costruito. Se Z fosse misurabile, sarebbe $L^1(\cup_j (Z + q_j)) = \sum_j L^1(Z) = +\infty$, (vedi la Prop. 1) mentre $\cup_j (Z + q_{j_k}) \subset [0, 2] \Rightarrow L^1(\cup_j (Z + q_{j_k})) \leq 2$.

Proposizione 2. Sia $\mu : \Sigma \to [0, +\infty]$ misura. Allora

(i) $A, B \in \Sigma,\ A \subset B\ \Rightarrow\ \mu(A) \leq \mu(B)$
(ii) $A, B \in \Sigma,\ A \subset B,\ \mu(A) < +\infty\ \Rightarrow\ \mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$
(iii) $E_j \in \Sigma,\ E_j \subset E_{j+1}\ \ \forall j \Rightarrow \mu(E_j) \to \mu(\cup_{j=1}^{+\infty} E_j)$
(iv) $E_j \in \Sigma,\ E_{j+1} \subset E_j\ \ \forall j,\ \mu(E_1) < +\infty\ \Rightarrow\ \mu(E_j) \to \mu(\cap_{j=1}^{+\infty} E_j)$

Prova. (i)-(ii) $B = (B \setminus A) \cup A \Rightarrow \mu(B) = \mu(B \setminus A) + \mu(A)$
(iii) Siccome $\mu(\cup_{j=1}^{+\infty} E_j) \geq \mu(E_{n+1}) \geq \mu(E_n)\ \ \forall n \ \Rightarrow\ \mu(\cup_{j=1}^{+\infty} E_j) \geq \sup_n \mu(E_n)$, possiamo supporre che $\sup_n \mu(E_n) < +\infty$. Ció implica che

$$\sum_{j=1}^n \mu(E_{j+1} \setminus E_j) = \mu(E_{n+1}) - \mu(E_1) \leq \sup_n \mu(E_n) < +\infty \quad \forall n \quad \text{e quindi} \quad \sum_{j=n}^{\infty} \mu(E_{j+1} \setminus E_j) \to_n 0.$$

e quindi $\mu(\cup_{j=1}^{+\infty} E_j) \leq \mu(E_n) + \sum_{j=n}^{+\infty} \mu(E_{j+1} \setminus E_j) \quad \to_n \sup_n \mu(E_n)$
(iv) Siccome $E_1 \setminus E_j \subset E_1 \setminus E_{j+1}$ e $\cup_j (E_1 \setminus E_j) = E_1 \setminus \cap_j E_j$, da (ii)- (iii) segue

$$\mu(E_1) - \mu(E_j) \to \mu(\cup_i (E_1 \setminus E_i)) = \mu(E_1 \setminus \cap_i E_i) = \mu(E_1) - \mu(\cap_i E_i)$$

MISURE BORELIANE, di RADON.

Sia (X, d) spazio metrico, e sia $\mathcal{B}$ la sigma algebra generata dai chiusi di X ($\mathcal{B}$ si chiama la sigma algebra dei boreliani di X).

Definizione 4. Una misura esterna μ su X si dice **misura boreliana** se $\mathcal{B} \subset \Sigma_\mu$. Se μ é anche finita sui compatti, μ é **misura di Radon**.

Definizione 5. Una misura esterna μ su X si dice **misura metrica** se

$$0 < d(A, B) \Rightarrow \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$$

Lemma . Siano μ misura metrica su (X, d), $E_j \subset E_{j+1}$ $\forall j$. Allora

$$d(E_{j+2} \backslash E_{j+1}, E_j \backslash E_{j-1}) > 0 \quad \forall j \geq 2 \quad \Rightarrow \quad \mu(E_j) \to \mu(\cup_j E_j).$$

Possiamo supporre $\sup_j \mu(E_j) < +\infty$, e quindi $\mu(E_2 \setminus E_1) + \ldots + \mu(E_{2n} \setminus E_{2n-1}) = \mu(\cup_{j=1}^n [E_{2j} \setminus E_{2j-1}]) \leq \mu(E_{2n}) \leq \sup_j \mu(E_j) < +\infty$ ed analogamente $\mu(E_3 \setminus E_2) + \ldots + \mu([E_{2n+1} \setminus E_{2n}]) \leq \sup_j \mu(E_j) < +\infty$ e quindi $\sum_j \mu([E_{j+1} \setminus E_j]) < +\infty$. Da qui

$$\cup_j E_j = E_n \cup (\cup_{j \geq n} [E_{j+1} \backslash E_j]) \quad \Rightarrow \quad \mu(\cup_j E_j) \leq \mu(E_n) + \sum_{j \geq n} \mu([E_{j+1} \backslash E_j]) \to_n \sup_n \mu(E_n)$$

$\to$ Gli E_j non si suppongono misurabili!

Proposizione 3: μ **metrica** $\Rightarrow$ μ **boreliana**

Sia $C = \overline{C}$ un insieme chiuso. Siano $A \subset C$, $B \subset C^c$. É $B = \cup_n B_n$ ove $B_n := \{x \in B : \ d(x, C) \geq \frac{1}{n}\}$. perché $B \subset C^c$, e C^c é aperto. Inoltre, $y \in B_j \setminus B_{j-1}, x \in B_{j+2} \setminus B_{j+1} \Rightarrow \frac{1}{j} \leq d(y, C) \leq d(y, x) + d(x, C) \leq d(y, x) + \frac{1}{j+1} \Rightarrow d(B_{j+2} \setminus B_{j+1}, B_j \setminus B_{j-1}) \geq \frac{1}{j} - \frac{1}{j+1} > 0$ $\forall j \geq 2$. Dal Lemma segue quindi che $\mu(B_n) \to \mu(B)$ e quindi $\mu(A \cup B) \geq \mu(A \cup B_n) = \mu(A) + \mu(B_n) \to \mu(A) + \mu(B)$.

Proposizione 4: L^N **é metrica e quindi boreliana**.

Infatti, sia $0 < \delta = d(A, B)$. Dato $\epsilon > 0$, siano R_j tali che

$$A \cup B \subset \cup_j R_j, \quad \text{diam} R_j \leq \frac{\delta}{2}, \qquad \sum_j \text{Vol} R_j \leq \mu(A \cup B) + \epsilon$$

Allora $\mu(A) + \mu(B) \leq \sum_{R_j \cap A \neq \emptyset} \text{Vol} R_j + \sum_{R_j \cap B \neq \emptyset} \text{Vol} R_j \leq \mu(A \cup B) + \epsilon.$

Proposizione 5: Approssimazione mediante aperti, compatti

i) $\forall A \subset \mathbf{R}^N : \quad L^N(A) = \inf\{L^N(O) : \quad A \subset O,\ O \text{ aperto } \}$

ii) $\forall E$ misurabile : $\quad L^N(E) = \sup\{L^N(K) : \quad K \subset E, K \text{ compatto } \}$

La i) segue dal fatto che vol(R) = vol(int R).
Proviamo dunque (ii). Sia dapprima $E \subset B_r$ e sia O_j aperto tale che

$$\overline{B}_r \setminus E \subset O_j, \quad L^N(O_j) \leq L^N(\overline{B}_r \setminus E) + \frac{1}{j} = L^N(\overline{B}_r) - L^N(E) + \frac{1}{j}$$

ovvero $\quad L^N(E) \leq L^N(\overline{B}_r) - L^N(O_j) + \frac{1}{j} \leq L^N(\overline{B}_r \setminus O_j) + \frac{1}{j} = L^N(K_j) + \frac{1}{j}$
ove $\quad K_j := \overline{B}_r \setminus O_j \subset E \quad$ é compatto.

Nel caso generale, se B_n denota la palla di raggio n, $L^N(E \cap B_n) \to_n L^N(E)$. Quindi, se $K_n \subset E \cap B_n$ é compatto tale che $L^N(E \cap B_n) \leq L^N(K_n) + \frac{1}{n}$ si ha $L^N(E) \leq \lim_n L^N(K_n) \leq L^N(E)$.

$\bigcirc \to$!! Da ii) segue che , se $L^N(E) < +\infty$ ed E é misurabile allora

$(*) \qquad \forall\ \epsilon, \quad \exists K_\epsilon \subset E \subset O_\epsilon, K_\epsilon \ \text{ compatto, } O_\epsilon \text{ aperto : } \ L^N(O_\epsilon \setminus K_\epsilon) \leq \epsilon$

Viceversa, se vale $(*)$, E é misurabile: $E = (\cap_n O_{\epsilon_n}) \setminus (\cap_n O_{\epsilon_n} \setminus E)$ é differenza di misurabili perché $(\cap_n O_{\epsilon_n}) \setminus E \subset [\cap_n O_{\epsilon_n}] \setminus [\cup_n K_{\epsilon_n}] \Rightarrow L^N(\cap_n O_{\epsilon_n} \setminus E) = 0$. In particolare, ogni insieme limitato di $\mathbf{R}^N$ e misurabile secondo Peano-Jordan é Lebesgue misurabile.

Corollario 1. $\qquad$ **L^N é borel regolare:**

$$\forall\ A \subset \mathbf{R}^N \quad \exists\ B \in \mathcal{B} : \qquad A \subset B \ \text{ e } \ L^N(A) = L^N(B)$$

Infatti $L^N(A) = L^N(\cap_j O_j)$ con $A \subset O_j,\ L^N(O_j) \leq L^N(A) + \frac{1}{j}$

Corollario 2 $\qquad A_j \subset A_{j+1} \ \Rightarrow \ L^N(A_j) \to L^N(\cup_j A_j)$

$\to$ gli A_j non sono supposti misurabili!

Verifica: siano $B_j \in \mathcal{B}$, $\quad A_j \subset B_j$, tali che $L^N(A_j) = L^N(B_j)$.
É $A_n \subset \cap_{j \geq n} B_j$ e $\cap_{j \geq n} B_j$ é famiglia crescente (di misurabili). Dunque

$$L^N(\cup_n A_n) \leq L^N(\cup_n \cap_{j \geq n} B_j) = \lim L^N(\cap_{j \geq n} B_j) \leq \lim L^N(A_n)$$

NOTA. L'analoga affermazione per l'intersezione é falsa.

AM5: Esercizi e complementi -I Settimana

Misura di Hausdorff. Dati $s \geq 0,\ \delta > 0, A \subset \mathbf{R}^n$ sia

$$H^s_\delta(A) = inf\{\sum_{j=1}^{+\infty}(\text{diam } C_j)^s\ :\ A \subset \cup_{j=1}^{+\infty} C_j,\ C_j = \overline{C}_j,\ \text{diam} C_j \leq \delta\}$$

$$H^s(A) = \sup_{\delta > 0} H^s_\delta(A)$$

(i) Provare che H^s (misura di Hausdorff s-dimensionale) é misura boreliana.

(ii) $H^s(rA) = r^s H^s(A), \forall A \subset \mathbf{R}^n, \forall r > 0$

(iii) $H^s(A) < +\infty, t > s \Rightarrow H^t(A) = 0$ e $H^s(A) > 0, t < s \Rightarrow H^t(A) = +\infty$

Esercizio 1 . Sia X un insieme .

(i) Per ogni $A \subset X$, sia $\mu(A) =$ numero di elementi di A, se A é un insieme finito, $\mu(A) = +\infty$ se A non é finito (μ é "misura che conta") . Provare che μ é una misura sull'insieme delle parti di X.

(i) Dato $X_0 \subset X$, sia $\delta_{X_0}(E) = 1$ se $E \cap X_0 \neq \emptyset$, $\delta_{X_0}(E) = 0$ se $E \cap X_0 = \emptyset$. Provare che δ_{X_0} è una misura su X e $\Sigma_\mu = \{E :\ X_0 \subset E \text{ op. } E \subset X_0^c\}$.

Esercizio 2. Dato X, sia Σ una σ- algebra di sottoinsiemi di X, $\mu : \Sigma \to [0, +\infty]$ misura, e sia $\hat{\mu}(E) = \inf\{\sum \mu(A_j) : E \subset \cup A_j, A_j \in \Sigma\}$. Provare che
(i) $\hat{\mu}$ è misura (esterna) su X, (ii) $\Sigma \subset \Sigma_{\hat{\mu}}$,
(iii) $\hat{\mu}$ é Σ-regolare: $\forall A \subset X,\ \exists E \in \Sigma :\ A \subset E,\ \hat{\mu}(A) = \mu(E)$

Suggerimento: $E \in \Sigma, A \subset \cup_j A_j,\ A_j \in \Sigma \Rightarrow \sum_j \mu(A_j) \geq \hat{\mu}(A \cap E) + \hat{\mu}(A \setminus E)$...

Esercizio 3. Sia $A \subset \mathbf{R},\ L^1(A) > 0$. Provare che esiste $E \subset A$ che non é L^1-misurabile.

Suggerimento. Cominciare col provare che $Z_0 \subset Z,\ L^1(Z_0) > 0 \Rightarrow Z_0$ *non é misurabile (Z é il noto esempio di insieme non misurabile..). Provare quindi che* $0 < L^1(A \cap (Z + q_j))$ *per qualche* j

Esercizio 4. Mostrare che non é sempre vero che

$$E_j \subset \mathbf{R},\ E_{j+1} \subset E_j, L^1(E_1) < +\infty \Rightarrow L^1(E_j) \to L^1(\cap_j E_j)$$

Suggerimento. Da $\cap_n \cup_{j \geq n} (Z + q_j) = \emptyset$... *ove* Z *é come sopra..*