La trasformata di Fourier

a cura di
Giulia Iacovelli e di Giulia Rosi

24/05/2012

1 ★ Introduzione

Pochi ne sono consapevoli ma la trasformata di Fourier é usata di continuo in decine di campi a prima vista inconciliabili tra loro, come ad esempio l′elettronica, la musica, la medicina, la fisica, la chimica ...
Per calcolare una trasformata basta infatti ascoltare. L′orecchio esegue automaticamente un calcolo che il nostro intelletto puó effettuare solo dopo anni di studio della matematica. Usate il cellulare? Guardate la tv? Ascoltate musica? Allora questa formula (in realtá è piú corretto parlare di una coppia di formule) merita di essere compresa, almeno nelle sue basi piú semplici e “pratiche”.
Iniziamo a vedere di che tipo di equazioni si sta parlando:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-\mathbf{i}2\pi ft}dt$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)e^{\mathbf{i}2\pi ft}df$$

Trasformata e antitrasformata di Fourier

Spaventose eh? Integrali, numeri complessi scritti in forma contratta ... calma! In realtá non sono poi così difficili.
In parole povere la trasformata di Fourier consente di scomporre un’onda qualsiasi, anche molto complessa e “rumorosa” (un segnale telefonico o televisivo, la musica, la voce!) in piú sotto-componenti, un po’ come attraverso la chimica si puó scomporre un cibo nei suoi sottoelementi così da capirne la reale composizione.
Piú precisamente la trasformata di Fourier permette di calcolare le diverse componenti (ampiezza, fase e frequenza) delle onde sinusoidali che, sommate tra loro, danno origine al segnale di partenza.
Storicamente queste due equazioni sono nate dalla brillante mente di Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830) quasi duecento anni fa, nel 1822.

L'analisi di Fourier[1] metteva in discussione le teorie matematiche cui aderivano senza riserve i suoi contemporanei. Molti dei grandi matematici francesi del primo Ottocento, tra cui Lagrange, Laplace, Legendre, Biot e Poisson, si rifiutavano di accettare la tesi di Fourier secondo la quale qualunque distribuzione iniziale di temperatura poteva essere scomposta in una semplice somma aritmetica di un'oscillazione fondamentale e delle sue armoniche superiori. Anche Eulero era in disaccordo con le idee di Fourier, benché avesse giá ipotizzato che alcune funzioni si potessero rappresentare come somma di sinusoidi. Accadde dunque che, quando Fourier sostenne la sua tesi a una seduta dell'Accademia francese delle scienze, Lagrange si alzó in piedi e la dichiaró impossibile. Nonostante ció, l'Accademia non potè ignorare la portata dei risultati umili e gli conferì un premio che tuttavia gli fu concesso con la seguente riserva: "*La novitá della materia, insieme alla sua importanza, ci ha convinto a conferire il premio, ma non possiamo non osservare che il modo in cui l'autore perviene alle sue equazioni non è esente da difficoltá e che il suo metodo analitico per integrarle lascia a desiderare quanto a generalitá e anche a rigore*". Il sospetto con cui i colleghi consideravano il suo lavoro ne ritardó la pubblicazione fino al 1815. Anzi, un resoconto completo comparve solo nel 1822, quando Fourier pubblicó il libro *"Thèorie analytique de la chaleur"*. Le obiezioni mosse all'impostazione di Fourier riguardavano in particolare l'asserzione che una funzione evidentemente discontinua potesse essere rappresentata come somma di sinusoidi, che sono funzioni continue. Le funzioni discontinue descrivono curve o rette spezzate; per esempio, la funzione detta gradino di Heaviside vale zero a sinistra e salta al valore uno a destra (con una funzione siffatta si puó descrivere il flusso della corrente quando viene chiuso un interruttore). Per i contemporanei di Fourier era cosa mai vista che una funzione discontinua risultasse dalla combinazione di funzioni continue ordinarie, per esempio funzioni lineari, quadratiche, esponenziali e sinusoidali. Tuttavia, se Fourier aveva ragione, la somma di un numero infinito di sinusoidi convergeva e rappresentava con precisione una funzione dotata di discontinuitá, anche numerose. A quel tempo ció sembrava un' assurditá...

[1]In analisi matematica, l'analisi di Fourier è una branca di ricerca che nasce dalle ricerche di Jean Baptiste Joseph Fourier, che nei primi anni dell'Ottocento, riuscì a dimostrare che una qualunque funzione continua poteva essere vista come una somma di infinite "opportune" funzioni sinusoidali. Grazie a tale scoperta si è potuto scomporre funzioni complicate in una serie di funzioni che prende il nome proprio di serie di Fourier, che ne rendono l'analisi piú semplice. É nota anche come analisi armonica.

2 ★ Le serie di Fourier

In molte applicazioni si ha a che fare con una grandezza periodica nel tempo (ad esempio un segnale sonoro, luminoso, di trasmissione ecc.) e si vuole risalire alle singole frequenze che la compongono e alle relative ampiezze, senza conoscerle in anticipo (si pensi ad esempio a un apparecchio elettronico che, captando attraverso un microfono le vibrazioni dell' aria prodotte da uno strumento musicale, le analizzi per riconoscere di quale nota si tratta). La cosiddetta analisi di Fourier che ci accingiamo a studiare ha come obiettivo primario proprio questo: dato un segnale periodico, riuscire a decomporlo come somma (sovrapposizione) di segnali di tipo sinusoidale, ciascuno con una propria frequenza (multipla intera di una frequenza base) e una propria ampiezza [3]. Fu proprio il matematico francese Joseph Fourier, motivato principalmente dallo studio dell'equazione del calore, il primo a rendersi conto che una funzione $f(x)$ sostanzialmente arbitraria [2] purchè periodica di periodo T, puó essere decomposta come somma infinita di seni e coseni (serie trigonometrica).
Si tratta in sostanza di uno sviluppo del tipo:

$$f(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty}(a_k cos(k\omega x) + b_k sin(k\omega x)), \qquad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

noto appunto come *sviluppo in serie di Fourier*.
Il passaggio dalla descrizione di un segnale (inteso come fenomeno periodico) dal punto di vista del suo andamento temporale alla sua descrizione dal punto di vista della decomposizione in somma di armoniche, viene spesso chiamato passaggio dal *dominio dei tempi* al *dominio delle frequenze.*

Definizione 1. *Una funzione f, definita sulla retta reale, si dice* ***periodica di periodo*** *T (o anche T-periodica) se $T > 0$ è un numero reale tale che*

$$f(x+T) = f(x) \textit{ per ogni } \forall x \in \mathbb{R}.$$

Definizione 2. *Fissato un numero $T > 0$, chiamiamo* ***polinomio trigonometrico*** *di periodo T una funzione del tipo:*

$$p(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{N}(a_n cos(n\omega x) + b_n sin(n\omega x)), \qquad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

dove a_n e b_n sono numeri reali, detti ***coefficienti*** *del polinomio trigonometrico, in particolare a_0 è il* ***termine noto****. Se inoltre almeno uno dei due coefficienti a_N e b_N è diverso da zero, si dice che il polinomio trigonometrico ha* ***grado N****.*

Definizione 3. *Una funzione periodica di periodo $T > 0$ si dice* ***continua a tratti*** *se è possibile trovare un numero finito di punti $x_0 = 0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_m = T$ tali che valgano le seguenti condizioni:*
a) La funzione f è continua in ogni intervallo aperto del tipo (x_i, x_{i+1}), $\forall i = 0, 1, \ldots, m\ 1$.
b) $\forall i = 0, 1, \ldots, m\ -1$ esistono finiti i seguenti limiti:

$$\lim_{t \to x_i{}^+} f(t), \qquad \lim_{t \to x_{i+1}{}^-} f(t)$$

[2]Vedremo nel corso del capitolo che, in realtá, la funzione f deve soddisfare alcune ipotesi

Definizione 4. *Sia $f(x)$ una funzione reale T-periodica e continua a tratti. I **coefficienti di Fourier di f** sono i numeri complessi definiti da*

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)e^{\mathbf{i}n\omega x}dx, \qquad \omega = \frac{2\pi}{T}, \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

La serie di funzioni

$$c_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(c_n e^{\mathbf{i}n\omega x} + c_{-n}e^{-\mathbf{i}n\omega x}),$$

che si indica anche col simbolo

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\mathbf{i}n\omega x}$$

*viene detta **serie di Fourier della funzione f**.*

Osservazione. Una funzione pari ha una serie di Fourier del tipo

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n cos(n\omega x)$$

(serie di coseni), mentre una funzione dispari ha una serie di Fourier del tipo

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n sin(n\omega x)$$

(serie di seni).

Teorema 1. ***(Lemma di Riemann Lebesgue)*** *I coefficienti di Fourier di una funzione T-periodica e continua a tratti sono infinitesimi, cioè si ha:*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 0$$

I grafici dei polinomi di Fourier, all'aumentare del grado N, approssimano sempre meglio il grafico della funzione di partenza $f(x)$. Tuttavia, se si cerca di rendere preciso questo concetto intuitivo di approssimazione, si incontrano delle difficoltà. Ad esempio, i polinomi di Fourier $P_N(x)$ sono funzioni continue, mentre il segnale $f(x)$ può avere delle discontinuità: in che senso, allora, delle funzioni continue possono approssimare una funzione discontinua? Occorre formalizzare il concetto intuitivo di approssimazione, a tal proposito considereremo le seguenti nozione di convergenza per successione di funzioni.

Definizione 5. *Supponiamo che I sia un intervallo, che $f(x)$ sia una funzione definita (almeno) per $x \in I$, e che $f_n(x)$ sia una successione di funzioni, tutte definite (almeno) per $x \in I$. Allora diciamo che:*
*1) La successione di funzioni f_n **converge puntualmente** alla funzione f su I, se si ha*

$$\lim_{n\to\infty} f(x) = f(x), \qquad \forall x \in I.$$

*2) La successione di funzioni f_n **converge uniformemente** alla funzione f su I, se si ha*

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sup_{x\in I}|f_n(x)-f(x)|\right)=0.$$

*3) La successione di funzioni f_n **converge in media quadratica** alla funzione f su I, se $I=[a,b]$ è un intervallo chiuso e limitato e si ha*

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b |f_n(x)-f(x)|^2dx=0.$$

In particolare la serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

*converge alla funzione $f(x)$ **puntualmente** (oppure **uniformemente**, oppure **in media quadratica**) su I, se la successione delle sue somme parziali*

$$S_N(x)=\sum_{n=1}^{N} f_n(x)$$

converge a $f(x)$ puntualmente (oppure uniformemente,oppure in media quadratica) su I.

Definizione 6. *Una funzione periodica di periodo $T>0$ si dice **regolare a tratti** se è possibile trovare un numero finito di punti*

$$x_0=0<x_1<x_2<\ldots<x_n=T$$

tali che valgano le seguenti condizioni:
a) La funzione f è di classe C^1 in ogni intervallo aperto del tipo (x_i,x_{i+1}), $i=0,1,\ldots,m1$.
b) Per ogni $i=0,1,\ldots,m\quad 1$ esistono finiti i seguenti limiti

$$\lim_{t\to x_i{}^+} f(t),\ \lim_{t\to x_{i+1}{}^-} f(t),\ \lim_{t\to x_i{}^+} f'(t),\ \lim_{t\to x_{i+1}{}^-} f'(t)$$

Teorema 2. *Sia $f(x)$ una funzione T-periodica regolare a tratti e continua. Allora la sua serie di Fourier converge uniformemente su $\mathbb{R}$ a $f(x)$. In altre parole, si ha*

$$\lim_{N\to\infty}\left(\sup_{x\in\mathbb{R}}|P_N(x)-f(x)|\right)=0,$$

dove $P_N(x)$ indica il polinomio di Fourier di $f(x)$ di grado N. In particolare, vale

$$a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n cos(n\omega x)+b_n sin(n\omega x))=f(x),\quad \forall x\in\mathbb{R},\quad \omega=\frac{2\pi}{T}.$$

3 ★ La trasformata di Fourier

In matematica, una **trasformata** è un operatore, generalmente lineare, di uno spazio di funzioni su un altro spazio di funzioni. Ovvero trasforma una funzione in un'altra funzione. Tale operatore è di solito applicato ad una funzione per semplificare alcune operazioni o in generale per risolvere più facilmente dei problemi.
Dato da risolvere un problema A, che può essere un calcolo aritmetico o la risoluzione di un'equazione differenziale, uno schema esemplificativo può essere il seguente:

1. si trasforma il problema A in un altro problema B più semplice da risolvere;
2. si risolve il problema B;
3. si antitrasforma la soluzione del problema B nella soluzione del problema A.

Quella di cui ci occuperemo è una **trasformata integrale**, ovvero un'applicazione, generalmente lineare, di uno spazio di funzioni su un altro spazio di funzioni, realizzata con un integrale.
La forma generale di una trasformata integrale lineare $T(f)$ è:

$$T(f)(s) = \int_a^b K(s,t)f(t)dt$$

ove $K(s,t)$, la funzione che differenzia le varie trasformazioni, è detta **nucleo** o kernel della trasformazione.

La trasformata di Fourier costituisce uno strumento (per certi versi analogo alle serie di Fourier) per analizzare un segnale $x(t)$ nel dominio delle frequenze. Mentre le serie di Fourier consentono lo studio di un segnale di tipo periodico, la trasformata di Fourier permette l'analisi di un segnale x(t) il cui andamento nel tempo non sia necessariamente periodico.

Definizione 7. *Sia $x(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ una funzione. Se*

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-\mathbf{i}\omega t}dt$$

*esiste finito per ogni $\omega \in \mathbb{R}$, allora diciamo che la funzione $x(t)$ è **trasformabile secondo Fourier**. In questo caso, la funzione*

$$F[x(t)](\omega) = X(\omega) := \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-\mathbf{i}\omega t}dt, \qquad \omega \in \mathbb{R}$$

*viene chiamata **trasformata di Fourier** di $x(t)$.*

Una classe importante di funzioni continue a tratti che sono trasformabili secondo Fourier è costituita dalle funzioni assolutamente integrabili, cioè dalle funzioni in $L^1(\mathbb{R})$.

Definizione 8. *Sia* $x(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *una funzione continua a tratti. Diciamo che* $x(t)$ *è* ***assolutamente integrabile*** *se l'integrale*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|dt < \infty.$$

Proposizione 1. ***(Condizione sufficiente per la trasformabilità).*** *Supponiamo che* $x(t)$ *sia continua a tratti e* $x(t) \in L^1(\mathbb{R})$*. Allora* $x(t)$ *è trasformabile secondo Fourier.*

Dimostrazione. Basta osservare che

$$|e^{-\mathbf{i}\omega t}| = 1 \quad \forall \omega, t \in \mathbb{R}.$$

Quindi si ha

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)e^{-\mathbf{i}\omega t}|dt = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|dt < +\infty, \forall \omega \in \mathbb{R} \quad \boxtimes$$

Osservazione. La seguente osservazione permette, talvolta, di semplificare il calcolo della trasformata di Fourier. Dato che $e^{-\mathbf{i}\omega t} = cos(\omega t) - \mathbf{i}sin(\omega t)$ la trasformata di Fourier si può scrivere come:

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)cos(\omega t)dt - \mathbf{i} \int_{-\infty}^{\infty} x(t)sin(\omega t)dt$$

Quindi, in generale, la trasformata di Fourier assume valori complessi, anche quando $x(t)$ è una funzione a valori reali. Tuttavia, se la funzione $x(t)$ è pari, il prodotto $x(t)cos(\omega t)$ è pari mentre $x(t)sin(\omega t)$ è dispari, quindi:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)cos(\omega t)dt = 2\int_{0}^{\infty} x(t)cos(\omega t)dt, \quad e \quad \int_{-\infty}^{\infty} x(t)sin(\omega t)dt = 0$$

Analogamente, se $x(t)$ è una funzione dispari, il prodotto $x(t)cos(\omega t)$ è dispari mentre $x(t)sin(\omega t)$ è pari, quindi:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)cos(\omega t)dt = 0, \quad e \quad \int_{-\infty}^{\infty} x(t)sin(\omega t)dt = 2\int_{0}^{\infty} x(t)sin(\omega t)dt$$

In particolare se $x(t)$ è reale e pari, allora $X(\omega)$ è reale e pari, mentre se $x(t)$ è reale e dispari, allora $X(\omega)$ è a valori immaginari puri e dispari.

Esempio (porta unitaria). Consideriamo la funzione *porta unitaria*, definita da

$$p(t) = \begin{cases} 1 & se - \frac{1}{2} < t < \frac{1}{2} \\ 0 & altrimenti. \end{cases}$$

È immediato verificare che $p_1(t) \in L^1(\mathbb{R})$, quindi possiamo considerare la trasformata di Fourier di $p_1(t)$ e calcolarla. Dato che, per $\omega \neq 0$, la funzione $e^{-\mathbf{i}\omega t}/(-\mathbf{i}\omega)$ è una primitiva dell'esponenziale immaginario $e^{-\mathbf{i}\omega t}$, si ha:

$$F[p_1(t)](\omega) := \int_{-\infty}^{\infty} p_1(t)e^{-\mathbf{i}\omega t}dt = \int_{-1/2}^{1/2} e^{-\mathbf{i}\omega t}dt = \frac{e^{-\mathbf{i}\omega t}}{-\mathbf{i}\omega}\Big|_{-1/2}^{1/2} = \frac{e^{\frac{-\mathbf{i}\omega}{2}} - e^{\frac{\mathbf{i}\omega}{2}}}{-\mathbf{i}\omega}$$

e quindi, ricordando la formula di Eulero

$$sin(\theta) = \frac{e^{\mathbf{i}\theta} - e^{-\mathbf{i}\theta}}{2\mathbf{i}}$$

si trova

$$F[p_1(t)](\omega) = \frac{2sin(\frac{\omega}{2})}{\omega}, \quad \omega \neq 0$$

Per $\omega = 0$ invece, il calcolo è ancora più semplice, dato che $e^0 = 1$ e quindi:

$$F[p_1(t)](0) = \int_{-1/2}^{1/2} 1dt = 1$$

Però, grazie al limite notevole

$$\lim_{\omega \to 0} \frac{2sin(\frac{\omega}{2})}{\omega} = 1$$

possiamo anche non distinguere tra il caso $\omega = 0$ e il caso $\omega \neq 0$, e scrivere semplicemente

$$F[p_1(t)](\omega) = \frac{2sin(\frac{\omega}{2})}{\omega}$$

dove la funzione al secondo membro si intende estesa per continuità nell'origine.

Esempio. Calcoliamo la trasformata di Fourier della funzione $x(t) = e^{-a|t|}$, dove $a > 0$ è un parametro reale positivo. Siccome $x(t)$ è una funzione pari, otteniamo:

$$F[e^{-a|t|}](\omega) = 2\int_0^{\infty} e^{-at}cos(\omega t)dt = \frac{2a}{\omega^2 + a^2}$$

Proprietá

Iniziamo a vedere alcune proprietà[2] della trasformata di Fourier:

Teorema 3. *Se $x(t) \in L^1(\mathbb{R})$, allora la sua trasformata di Fourier $X(\omega)$ è una funzione limitata.*

Dimostrazione. Si ha:

$$|X(\omega)| := \Big|\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-\mathbf{i}\omega t}dt\Big| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)e^{-\mathbf{i}\omega t}|dt = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|dt \quad \forall \omega \in \mathbb{R},$$

e l'ultimo integrale è finito dato che $x(t) \in L^1(\mathbb{R})$. ⊠

Linearità. Se $x(t)$ e $y(t)$ sono funzioni trasformabili secondo Fourier con trasformate $X(\omega)$ e $Y(\omega)$, allora è trasformabile anche ogni loro combinazione lineare, e si ha:

$$F[ax(t) + by(t)](\omega) = aX(\omega) + bY(\omega).$$

Dimostrazione. La linearità è una diretta conseguenza della definizione di trasformata di Fourier, e della linearità dell'integrale. ⊠

Riscalamento. Se $a \neq 0$ è un parametro reale, si ha:

$$F[x(at)](\omega) = \frac{1}{|a|}X(\omega/a).$$

Dimostrazione. Basta effettuare il cambio di variabile $at = T$ nell'integrale:

$$F[x(at)](\omega) := \int_{-\infty}^{\infty} x(at)e^{-\mathbf{i}\omega t}dt =$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty} x(T)e^{\frac{-\mathbf{i}\omega T}{a}}dT & se \quad a > 0 \\ \frac{1}{a}\int_{\infty}^{-\infty} x(T)e^{\frac{-\mathbf{i}\omega T}{a}}dT & se \quad a < 0 \end{cases}$$

In ogni caso, si ha:

$$F[x(at)](\omega) = \frac{1}{|a|}\int_{-\infty}^{\infty} x(T)e^{-\mathbf{i}\omega T/a}dT := \frac{1}{|a|}X\Big(\frac{\omega}{a}\Big).\boxtimes$$

Esempio (porta centrata). Calcoliamo la trasformata di Fourier della funzione porta $p_T(t)$, $T > 0$:

$$p_T(t) = \begin{cases} 1 & se - \frac{T}{2} < t < \frac{T}{2} \\ 0 & altrimenti. \end{cases}$$

Si tratta di una "funzione porta" di ampiezza T, centrata nell'origine. Notiamo che si ha $p_T(t) = p_1(t/T)$, quindi applicando la proprietá di riscalamento con $a = 1/T$, troviamo:

$$F[p_T(t)](\omega) = F[p_1(t/T)](\omega) = TF[p_1(t)](T\omega) = T\frac{2sin(\frac{T\omega}{2})}{T\omega}$$

ovvero:

$$F[p_T(t)](\omega) = \frac{2sin(\frac{T\omega}{2})}{\omega}, \quad T > 0.$$

Coniugio. Indicando con $\overline{x}$ il complesso coniugato di x, si ha:

$$F\Big[\overline{x(t)}\Big](\omega) = \overline{X(-\omega)}.$$

Dimostrazione. Dato che $e^{-\mathbf{i}\omega t} = \overline{e^{\mathbf{i}\omega t}}$, si ha:

$$F\Big[\overline{x(t)}\Big](\omega) := \int_{-\infty}^{\infty} \overline{x(t)}e^{-\mathbf{i}\omega t}dt = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{x(t)e^{\mathbf{i}\omega t}}dt = \overline{\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{\mathbf{i}\omega t}dt} =: \overline{X(-\omega)}. \quad \boxtimes$$

Dalla precedente proprietá segue facilmente il seguente risultato:

Teorema 4. ***(Uguaglianza di Parseval).*** *Supponiamo che $x(t)$ sia trasformabile secondo Fourier, e che l'integrale:*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt$$

sia finito. Allora si ha:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 d\omega$$

La formula di Parseval permette di calcolare l'energia di un segnale $x(t)$ tramite la sua trasformata di Fourier.
Dimostrazione.[1]

$$\int_{-\infty}^{\infty}|x(t)|^2dt = \int_{-\infty}^{\infty}x(t)\overline{x(t)}dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\Big[\int_{-\infty}^{\infty}\overline{X(-\omega)}e^{\mathbf{i}\omega t}d\omega\Big]dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\Big[\int_{-\infty}^{\infty}\overline{X(\omega)}e^{-\mathbf{i}\omega t}d\omega\Big]dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Big[\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-\mathbf{i}\omega t}dt\Big]\overline{X(\omega)}d\omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(\omega)\overline{X(\omega)}d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|X(\omega)|^2d\omega$$

Modulazione. Per $a \in \mathbf{R}$, si ha:

$$F[x(t)e^{\mathbf{i}at}](\omega) = X(\omega - a).$$

Dimostrazione. Si tratta di una semplice verifica:

$$F[x(t)e^{\mathbf{i}at}](\omega) := \int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{\mathbf{i}at}e^{-\mathbf{i}\omega t}dt = \int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-\mathbf{i}(\omega-a)t}dt =: X(\omega - a). \quad \boxtimes$$

Traslazione. Per ogni $a \in \mathbb{R}$ si ha:

$$F[x(t-a)](\omega) = X(\omega)e^{\mathbf{i}\omega a}$$

Dimostrazione. È sufficiente il cambiamento di variabile $T = t-a$ nell'integrale:

$$F[x(t-a)](\omega) := \int_{-\infty}^{\infty}x(t-a)e^{-\mathbf{i}\omega t}dt = \int_{-\infty}^{\infty}x(T)e^{-\mathbf{i}\omega(T+a)}dT = e^{-\mathbf{i}\omega a}\int_{-\infty}^{\infty}x(T)e^{-\mathbf{i}\omega T} :=$$

$$= X(\omega)e^{-\mathbf{i}\omega a} \quad \boxtimes$$

Le precedenti proprietà dimostrano che la trasformata di Fourier trasforma la moltiplicazione per un carattere[2] in una traslazione, e viceversa.
Esempio (porta decentrata). Calcoliamo la trasformata di Fourier della funzione

$$x(t) = \begin{cases} 1 & se \quad 6 < t < 10 \\ 0 & altrimenti. \end{cases}$$

Si tratta di una *funzione porta* di ampiezza 4 centrata nel punto $a = 8$. Quindi mediante una traslazione ci si può ricondurre alla porta centrata:

$$x(t) = p_4(t-8)$$

Dalla proprietá di traslazione e dall'esempio della porta centrata si ottiene quindi:

$$F[x(t)](\omega) = F[p_4(t-8)](\omega) = e^{-\mathbf{i}8\omega}F[p_4(t)](\omega) = e^{-\mathbf{i}8\omega}\frac{2sin(2\omega)}{\omega}$$

[1] segue dalla formula di inversione che vedremo in seguito
[2] Una funzione φ è un carattere di $\mathbb{R}$ se $|\varphi(t)| = 1$ e se $\varphi(s+t) = \varphi(s)\varphi(t), \forall s, t \in \mathbb{R}$

Moltiplicazione per t. Se $tx(t) \in L^1(\mathbb{R})$, allora $X(\omega)$ è derivabile e

$$F[tx(t)](\omega) = \mathbf{i}X'(\omega)$$

Dimostrazione. Si ha:

$$\mathbf{i}X'(\omega) := \mathbf{i}\frac{d}{d\omega}\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-\mathbf{i}\omega t}dt = \mathbf{i}\int_{-\infty}^{\infty} x(t)(\frac{d}{d\omega}e^{-\mathbf{i}\omega t})dt = -\mathbf{i^2}\int_{-\infty}^{\infty} x(t)te^{-\mathbf{i}\omega t}dt := F[tx(t)](\omega)$$

ove il passaggio della derivata sotto segno di integrale è possibile grazie al teorema di convergenza dominata[3]. $\boxtimes$

Esempio. Calcoliamo la trasformata di Fourier della funzione

$$x(t) = \begin{cases} t & se -1 < t < 1 \\ 0 & altrimenti. \end{cases}$$

Si verifica facilmente che $x(t) = tp_2(t)$. Quindi, applicando la proprietà di moltiplicazione per t e ricordando l'esempio della porta centrata, troviamo:

$$F[tp_2(t)](\omega) = \mathbf{i}\frac{d}{d\omega}(F[p_2(t))](\omega)) = \mathbf{i}\frac{d}{d\omega}(\frac{2sin(\omega)}{\omega}) = 2\mathbf{i}\frac{\omega cos(\omega) - sin(\omega)}{\omega^2}$$

Si noti che $tp_2(t)$ è una funzione reale e dispari, quindi la sua trasformata di Fourier è a valori immaginari e dispari.

Osservazione. La proprietà di moltiplicazione per t può essere iterata più volte. Così se $n \in \mathbf{N}$ e $t^n x(t) \in L^1(\mathbb{R})$, allora:

$$F[t^n x(t)](\omega) = \mathbf{i^n}\frac{d^n}{d\omega^n}X(\omega).$$

Trasformata della derivata. Se $x(t)$ è derivabile e $x'(t) \in L^1(\mathbb{R})$, allora

$$F[x'(t)](\omega) = \mathbf{i}\omega X(\omega)$$

Dimostrazione. Ciò si può giustificare integrando per parti:

$$F[x'(t)](\omega) := \int_{-\infty}^{\infty}(\frac{d}{dt}x(t))e^{-\mathbf{i}\omega t}dt = -\int_{-\infty}^{\infty} x(t)(\frac{d}{dt}e^{-\mathbf{i}\omega t})dt = \mathbf{i}\omega\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-\mathbf{i}\omega t}dt =: \mathbf{i}\omega X(\omega) \quad \boxtimes$$

Esempio. Calcoliamo la trasformata di Fourier della funzione $x(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$. Poiché il calcolo dell'integrale

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}e^{-\mathbf{i}\omega t}dt$$

é abbastanza complicato, si procede in maniera indiretta. Notiamo che:

$$x'(t) = -te^{-\frac{t^2}{2}} = -tx(t)$$

[3]Teorema della convergenza dominata: Siano $f_n \geq 0$ funzioni misurabili convergenti puntualmente a zero. Se esiste $g \geq 0$ misurabile tale che:

$$\int_X g < \infty \quad e \quad f_n(x) \leq g(x), \forall n,$$

allora $\int_X f_n \to 0$.

quindi per la proprietá di moltiplicazione per t si ha:

$$F[x'(t)](\omega) = F[-tx(t)](\omega) = -F[tx(t)](\omega) = -\mathbf{i}X'(\omega)$$

Per la proprietá della trasformata della derivata:

$$F[x'(t)](\omega) = \mathbf{i}\omega X(\omega)$$

e, uguagliando le due espressioni, si trova la relazione:

$$-\mathbf{i}X'(\omega) = \mathbf{i}\omega X(\omega), \quad \textit{ovvero} \quad X'(\omega) + \omega X(\omega) = 0.$$

Questa é un'equazione differenziale lineare omogenea del primo ordine, nell'incognita $X(\omega)$, la cui soluzione é:

$$X(\omega) = Ce^{-\frac{\omega^2}{2}}, \quad C \in \mathbf{R}.$$

Questo significa allora che la trasformata di Fourier di $x(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$ coincide, a meno di una costante moltiplicativa C, con $x(t)$ stessa, cioé $F[x(t)](t) = Cx(t)$, e quindi iterando:

$$F[F[x(t)]](t) = F[Cx(t)](t) = CF[x(t)](t) = C^2x(t).$$

Essendo $x(0) = 1$, ottengo:

$$F[F[x]](0) = C^2$$

e dalla *proprietá di simmetria*:

$$F[F[x(t)]](t) = 2\pi x(-t)$$

si ha anche che:

$$F[F[x]](0) = 2\pi$$

Quindi si ha $C^2 = 2\pi$,da cui $C = \pm\sqrt{2\pi}$, e sceglieremo la determinazione positiva, perché basta notare che:

$$X(0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt > 0,$$

e quindi C dev'essere positiva, $C = \sqrt{2\pi}$. In definitiva si trova:

$$F[e^{-\frac{t^2}{2}}](\omega) = \sqrt{2\pi}e^{-\frac{\omega^2}{2}}.$$

É interessante notare come, scegliendo $\omega = 0$ e applicando al primo membro la definizione di trasformata di Fourier, si ottenga l'integrale notevole:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt = \sqrt{2\pi}$$

Convoluzione. Siano $f \in L^1$, $g \in L^1$ e $h = f * g$. Allora $H(t) = F(t)G(t)$, ovvero la trasformata di Fourier trasforma convoluzioni in prodotti puntuali.

Dimostrazione.[4] Innanzitutto notiamo che $F[f * g]$ è ben definita perchè $f * g \in L^1$. La dimostrazione di tale proprietá é un'applicazione del teorema di Fubini:

$$H(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mathbf{i}tx} dm(x) \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)dm(y) = \int_{-\infty}^{\infty} g(y)e^{-\mathbf{i}ty} dm(y) \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)e^{-\mathbf{i}t(x-y)} dm(x) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} g(y)e^{-\mathbf{i}ty} dm(y) \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-\mathbf{i}tx} dm(x) = G(t)F(t).$$

Si osservi che é stata usata l'invarianza per traslazione di m. $\boxtimes$

[4]Utilizziamo la notazione per cui: $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dm(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$

4 ★ Antitrasformata di Fourier

La trasformata di Fourier trova numerose applicazioni, tra cui l'analisi di un segnale $x(t)$ nello spazio delle frequenze. Di fondamentale importanza è dunque la possibilità di ricostruire il segnale $x(t)$, conoscendo la sua trasformata $X(\omega)$: questa operazione (inversa rispetto alla trasformata di Fourier) viene detta *Antitrasformata di Fourier* [1].

Definizione 9. *Sia $X(\omega) : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ una funzione trasformabile secondo Fourier. La funzione:*

$$F^{-1}\Big[X(\omega)\Big](t) := \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{i\omega t}d\omega, \quad t \in \mathbb{R}$$

viene detta ***antitrasformata di Fourier*** *di $X(\omega)$.*

La funzione $X(\omega)$ è dunque pensata come funzione sul dominio delle frequenze, mentre la variabile temporale t gioca un ruolo di parametro nell'integrale.
Osservazione. Si noti che il calcolo dell'antitrasformata di Fourier si riduce a quello della trasformata: infatti, confrontando le due definizioni si vede subito che:

$$F^{-1}[x(t)](\omega) = \frac{1}{2\pi}F[x(t)](-\omega).$$

Per dimostrare la formula di inversione abbiamo bisogno dei seguenti risultati preliminari.

Teorema 5. *Per ogni funzione f su $\mathbb{R}$ e ogni $y \in \mathbb{R}$, sia f_y la traslata di f, definita dalla:*

$$f_y(x) = f(x-y) \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Se $1 \leq p < \infty$ e se $f \in L^p$, l'applicazione

$$y \to f_y$$

è un'applicazione uniformemente continua di $\mathbb{R}$ su $L^p(\mathbb{R})$.

Dimostrazione. Fissiamo un $\epsilon > 0$. Poichè $f \in L^p$, esiste una funzione continua g il cui supporto appartiene all'intervallo limitato $[-A, A]$ tale che:

$$||f-g||_p < \epsilon$$

La continuità uniforme di g mostra che esiste un $\delta \in (0, A)$ tale che $|s-t| < \delta$ implica

$$|g(s) - g(t)| < (3A)^{-\frac{1}{p}}\epsilon.$$

Se $|s-t| < \delta$, ne segue che

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g(x-s) - g(x-t)|^p dx < (3A)^{-1}\epsilon^p(2A+\delta) < \epsilon^p,$$

cosicchè $||g_s - g_t||_p < \epsilon$. Dall'invarianza per traslazione delle norme L^p (realtive alla misura di Lebesgue): $||f||_p = ||f_s||_p$, segue che:

$$||f_s - f_t||_p \leq ||f_s - g_s||_p + ||g_s - g_t||_p + ||g_t - f_t||_p = ||(f-g)_s||_p + ||g_s - g_t||_p + ||(g-f)_t||_p < 3\epsilon$$

per ogni $|s-t| < \delta$. Da cui segue la tesi. ⊠

Teorema 6. *Se $f \in L^1$, è $F \in C_0$*[5] *e*

$$||F||_\infty \leq ||f||_1.$$

Dimostrazione La disuguaglianza segue facilmente dalla definzione di F e dal fatto che $f \in L^1$.
Inoltre se $t_n \to t$, si ha:

$$|F(t_n) - F(t)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)||e^{-\mathbf{i}t_n x} - e^{-\mathbf{i}tx}|dx.$$

L'integrando è limitato da $2|f(x)|$ e tende a zero per ogni x, quando $n \to \infty$. Quindi $F(t_n) \to F(t)$, in base al teorema della convergenza dominata. Dunque F è continua.
Essendo poi $e^{\pi \mathbf{i}} = -1$, dalla definizione di trasformata segue che:

$$F(t) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-\mathbf{i}t(x+\pi/t)} dx = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x - \pi/t) e^{-\mathbf{i}tx} dx.$$

Quindi

$$2F(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \Big[f(x) - f\Big(x - \frac{\pi}{t}\Big)\Big] e^{-\mathbf{i}tx} dx,$$

e dunque:

$$2|F(t)| \leq ||f - f_{\pi/t}||_1,$$

che, per il teorema precedente, tende a zero per $t \to \pm\infty$ ⊠.

Una coppia di funzioni ausiliarie. Nella dimostrazione del teorema di inversione ci tornerà utile conoscere una funzione positiva H che abbia una trasformata di Fourier positiva, il cui integrale si possa calcolare facilmente. A tal proposito, sceglieremo per comodità la seguente:

$$H(t) = e^{-|t|}$$

e definiamo

$$h_\lambda = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} H(\lambda t) e^{\mathbf{i}tx} dx \quad (\lambda > 0).$$

Un semplice calcolo mostra che

$$h_\lambda(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\lambda}{\lambda^2 + x^2},$$

per cui

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} h_\lambda(x) dx = 1.$$

Si osservi che $0 < H(t) \leq 1$ e che $H(\lambda t) \to 1$ per $\lambda \to 0$.

Proposizione 2. *Se $f \in L^1$, risulta*[6]*:*

$$(f * h_\lambda)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} H(\lambda t) F(t) e^{\mathbf{i}xt} dm(t).$$

---

[5] C_0 indica lo spazio di tutte le funzioni continue su $\mathbb{R}$ che "tendono a zero all'infinito"
[6] Utilizziamo la notazione per cui: $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dm(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$

Dimostrazione. Si tratta di una semplice applicazione del teorema di Fubini:

$$(f*h_\lambda)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)dm(y) \int_{-\infty}^{\infty} H(\lambda t)e^{\mathbf{i}ty}dm(t) = \int_{-\infty}^{\infty} H(\lambda t)dm(t) \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)e^{\mathbf{i}ty}dm(y) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} H(\lambda t)dm(t) \int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{\mathbf{i}t(x-y)}dm(y) = \int_{-\infty}^{\infty} H(\lambda t)F(t)e^{\mathbf{i}tx}dm(t).$$

Teorema 7. *Se $g \in L^\infty$ e g è continua in un punto x, è:*

$$\lim_{\lambda \to 0} (g * h_\lambda)(x) = g(x).$$

Dimostrazione. Per come avevamo in precedenza definito:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} h_\lambda(x)dx = 1,$$

si ha:

$$(g*h_\lambda)(x)-g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} [g(x-y)-g(x)]h_\lambda(y)dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} [g(x-y)-g(x)]\lambda^{-1}h_1(\frac{y}{\lambda})dy =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} [g(x-\lambda s) - g(x)]h_1(s)ds.$$

L'ultimo integrando è dominato da $2||g||_\infty h_1(s)$ e converge a zero puntualmente per ogni s quando $\lambda \to 0$. Quindi la tesi segue dal teorema della convergenza dominata. ⊠

Teorema 8. *Se $1 \leq p < \infty$ e $f \in L^p$, risulta*

$$\lim_{\lambda \to 0} ||f * h_\lambda - f||_p = 0$$

Dimostrazione. Poiché $h_\lambda \in L^q$, ove q é l'esponente coniugato di p, $(f*h_\lambda)(x)$ é definita per ogni x (in effetti, $f * h_\lambda$ é continua).
In base alla definizione di trasformata, si ha:

$$(f * h_\lambda)(x) - f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} [f(x-y) - f(x)]h_\lambda(y)dy,$$

e si ha:

$$|(f * h_\lambda)(x) - f(x)|^p \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x-y) - f(x)|^p h_\lambda(y)dy$$

Integrando rispetto ad x la precedente e applicando il teorema di Fubini si ottiene:

$$||f * h_\lambda - f||_p^p \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} ||f_y - f|_p^p h_\lambda(y)dy = g * h_\lambda(0)$$

Se $g(y) = ||f_y - f||_p^p$, per il teorema 5 g é limitata, continua e $g(0) = 0$. Quindi, grazie al teorema 7, il secondo membro dell'ultima disuguaglianza tende a zero quando $\lambda \to 0$. ⊠

Teorema 9. ***(La formula di inversione)*** *Se $f \in L^1 e F \in L^1$, e se*

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(t) e^{\mathbf{i}xt} dt \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

allora $g \in C_0$ ed $f(x) = g(x)$ q.o.

Dimostrazione. [4] Per la proposizione 2, vale:

$$(f * h_\lambda)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} H(\lambda t) F(t) e^{\mathbf{i}xt} dt$$

Gli integrandi a secondo membro sono limitati da $|F(t)|$ e per il teorema della convergenza dominata, poiché $H(\lambda t) \to 1$ per $\lambda \to 0$, si ha che il secondo membro converge a $g(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$.
Per il teorema 8[7] vediamo che esiste una successione λ_n tale che $\lambda_n \to 0$ e

$$\lim_{n \to \infty} (f * h_{\lambda_n})(x) = f(x) \quad q.o.$$

Pertanto $f(x) = g(x)$ q.o. Dal teorema 5 segue che $g \in C_0$. ⊠

Teorema 11. ***(Il teorema dell'unicitá)*** *Se $f \in L^1$ e $F(t) = 0$ per tutti i $t \in \mathbb{R}$, risulta $f(x) = 0$ q.o.*

Dimostrazione. Poiché $F = 0$, si ha $F \in L^1$ e il risultato segue dalla formula di inversione. ⊠

Il teorema di Plancherel

Teorema 12. *Ad ogni $f \in L^2$ è possibile associare una funzione $F \in L^2$ in modo tale che valgano le seguenti proprietà:*

1. *Se $f \in L^1 \cap L^2$, $\quad F$ è la trasformata di Fourier di f definita precedentemente.*

2. *Per ogni $f \in L^2$, $||F||_2 = ||f||_2$.*

3. *L'applicazione $f \to F$ è un isomorfismo di spazi di Hilbert di L^2 su L^2.*

4. *Vale la seguente relazione simmetrica fra f e F: se*

$$\varphi_A(t) = \int_{-A}^{A} f(x) e^{-\mathbf{i}x(t)} dm(x) \quad e \quad \psi_A(x) = \int_{-A}^{A} F(t) e^{\mathbf{i}x(t)} dm(t),$$

risulta $||\varphi_A - F||_2 \to 0$ e $||\psi_A - f||_2 \to 0$ per $A \to \infty$.

Nota. Poichè $L^1 \cap L^2$ è denso in L^2 le proprietà 1 e 2 determinano l'applicazione $f \to F$ univocamente. La proprietà 4 può chiamarsi *teorema di inversione in* L^2.

[7]combinato col seguente:

Teorema 10. *Se $1 \leq p \leq \infty$, e se $\{f_n\}$ è una successione di Cauchy in $L^p(\mu)$ con limite f, allora $\{f_n\}$ contiene una sottosuccessione che converge puntualmente q.o. a $f(x)$.*

★ Applicazione della trasformata di Fourier all'equazione del calore

L'equazione del calore[5] é rappresentata dalla seguente formula:

$$\frac{d}{dt}u(x,t) = a^2\frac{d^2}{dx^2}u(x,t), \qquad x \in \mathbf{R}$$

e descrive l'evoluzione della temperatura di un solido. Se impongo anche una condizione sulla temperatura iniziale del solido, avró un sistema del tipo:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}u(x,t) = a^2\frac{d^2}{dx^2}u(x,t) \\ u(x,0) = \varphi(x) \end{cases}$$

Sia ora $U(\lambda,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\mathbf{i}\lambda x}u(x,t)dx$ la trasformata di Fourier della funzione $u(x,t)$; se applico tale trasformata al sistema appena incontrato avró:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}U(\lambda,t) = -a^2\lambda^2 U(\lambda,t) \\ U(\lambda,0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\mathbf{i}\lambda x}\varphi(x)dx \end{cases}$$

e la prima equazione, una volta fissato λ, vista come variabile di t, la posso risolvere per separazione di variabili:

$$\frac{\frac{d}{dt}U(\lambda,t)}{U(\lambda,t)} = -a^2\lambda^2;$$

$$\log\frac{U(\lambda,t)}{U(\lambda,0)} = -a^2\lambda^2 t;$$

$$U(\lambda,t) = U(\lambda,0)e^{-a^2\lambda^2 t}.$$

Adesso, grazie all'antitrasformata:

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mathbf{i}\lambda x}U(\lambda,t)d\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mathbf{i}\lambda x}e^{-a^2\lambda^2 t}U(\lambda,0)d\lambda =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mathbf{i}\lambda x}e^{-a^2\lambda^2 t}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\mathbf{i}\lambda y}\varphi(y)dyd\lambda = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(y)\Big[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mathbf{i}\lambda(x-y)-a^2\lambda^2 t}d\lambda\Big]dy =$$

e dopo alcuni calcoli si giunge a:

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(y)e^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2t}}\frac{\sqrt{\pi}}{a^2t}dy = \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2t}}\varphi(y)dy$$

che é la soluzione dell'equazione del calore, ed é una convoluzione della gaussiana con il dato iniziale φ.

Definisco una funzione $G(x,y,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}}e^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2t}}$, definita per $t > 0$. Vediamo che proprietá ha la funzione G:

1. Il suo integrale:

$$\int_{-\infty}^{\infty} G(x,y,t)dy = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-u^2}\sqrt{4a^2t}}{\sqrt{4\pi a^2 t}}du = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2}du = 1$$

2. $G \in \mathrm{C}^\infty$ per $t > 0$;
3. G risolve l'equazione del calore: $G_t = a^2 G_{xx}$;
4. Per $t \to 0$ tende a concentrarsi in un punto: se t diventa molto piccolo la gaussiana si stringe e sale, perché deve mantenere sempre il suo integrale uguale a 1,diventa cioé sempre piú piccata.

Esempio Sia data la successione di funzioni:

$$\begin{cases} n & -\frac{1}{2n} \leq x \leq \frac{1}{2n} \\ 0 & altrimenti \end{cases}$$

Poichè:

$$\int_{\mathbf{R}} \varphi_n(x)dx = n * \frac{1}{n} = 1$$

allora:

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x)dx = 1.$$

Dunque:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbf{R}} \varphi_n(x) f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_{-\frac{1}{2n}}^{\frac{1}{2n}} nf(x)dx =$$

Per il teorema della media esiste $\xi \in [-\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n}]$:

$$\lim_{n\to\infty} f(\xi_n) n \frac{1}{n} = f(0) = \delta_0 f$$

ove $\delta_0 f$ è la delta di Dirac della funzione f.

Quindi,come abbiamo visto, $u(x,t)$ essendo definita come convoluzione tra $G \in \mathrm{C}^\infty$ e φ, é C^∞, sia rispetto a x sia rispetto a $t > 0$.

Legge di Fourier

Un problema fisico importante è il seguente: supponiamo di avere una sbarra lunga L con temperatura iniziale costante T, con a sinistra una fonte posta ad una temperatura T_1 e a destra un'altra fonte posta ad una temperatura T_2,ove $T \neq T_1, T_2$ e $T_1, T_2 > 0$. Tale problema fisico e' descritto dal sistema:

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} \\ u(x,0) = T \\ u(0,t) = T_1 := \mu_1(t) \\ u(L,t) = T_2 := \mu_2(t) \end{cases}$$

La soluzione a tale sistema dev'essere della forma $u(x,t) = v(x,t) + U(x,t)$,ove $U(x,t)$ è l'interpolazione lineare definita come:

$$U(x,t) = \mu_1(t) + \frac{x}{L}(\mu_2(t) - \mu_1(t))$$

e $v(x,t)$ tale che risolve un problema più semplice,omogeneo:

$$\begin{cases} v_t = a^2 v_{xx} - [\mu_1'(t) + \frac{x}{L}(\mu_2'(t) - \mu_1'(t))] \\ v(x,0) = \varphi(x) - [\mu_1(0) + \frac{x}{L}(\mu_2(0) - \mu_1(0))] \\ v(0,t) = v(L,t) = 0 \end{cases} = \begin{cases} v_t = a^2 v_{xx} \\ v(x,0) = T - [T_1 + \frac{x}{L}(T_2 - T_1)] \\ v(0,t) = v(L,t) = 0 \end{cases}$$

da cui si ottiene la soluzione:

$$v(x,t) = \frac{2}{L}\sum_{n\geq 1} e^{-\frac{n^2\pi^2 a^2 t}{L^2}}[(T-T_1)\frac{L}{n\pi}[1-(-1)^n]+(T_2-T_1)\frac{L}{n\pi}(-1)^{n+1}]sin(\frac{n\pi}{L}x)$$

di cui ci interessa il comportamento all'infinito,e cioè che il $\lim_{t\to\infty} v(x,t) = 0$. Allora $u(x,t) = v(x,t) + U(x,t) \to U(x,t)$, per $t \to \infty$: la temperatura stazionaria (che rimane cioè fissa nel tempo) è un'interpolazione lineare tra le due temperature poste all'estremità della sbarra,ovvero dopo un certo tempo si raggiunge una temperatura limite.

Riferimenti bibliografici

[1] *Analisi reale e complessa*, W. Rudin

[2] *La trasformata di Fourier*, P. Tilli

[3] *Trasformazione di Fourier*, De Marco

[4] *Analysis*, Lieb and Loss

[5] *Appunti delle lezioni di FM310*, Prof. Pellegrinotti