Tutorato di AM210 - Soluzioni

A.A. 2011/2012 — Docente: Prof. G. Mancini
Tutori: Vincenzo Morinelli, Gianluca Lauteri

Tutorato 6: Integrali dipendenti da parametro

Testi e soluzioni dei tutorati disponibili all'indirizzo `http://am210-1112.blogspot.com/`

Soluzione Esercizio 6.1.

(6.1.1) f è definita $\forall x \in \mathbb{R}$ perché l'integranda non ha asintoti e all'infinito $\log\left(x^2t^2+1\right)$ ha lo stesso andamento di $\log\left(x^2t^2\right) = 2\log(xt)$, dunque l'integranda ha lo stesso andamento di $\dfrac{2\log(xt)}{t^2+1}$ che è integrabile all'infinito

(6.1.2) f è continua su tutto $\mathbb{R}$ perché l'integranda è continua e per $x \in [x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon]$ si ha $\left|\dfrac{\log\left(x^2t^2+1\right)}{t^2+1}\right| \le \left|\dfrac{\log\left((|x_0|+\varepsilon)^2t^2+1\right)}{t^2+1}\right|$ che è integrabile

Soluzione Esercizio 6.2.

(6.2.1) $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{1-e^{-xt^2}}{t}dt$ è definita $\forall x \in \mathbb{R}$ perché è l'integrale di una funzione continua e limitata su un intervallo limitato, dal momento che

$$\lim_{t\to 0}\frac{1-e^{-xt^2}}{t} = \lim_{t\to 0} xt\frac{1-e^{-xt^2}}{xt^2} = \lim_{t\to 0} xt = 0$$

(6.2.2) Fissati $x_0 \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, si ha

$$\frac{1-e^{-xt^2}}{t} \le \frac{1-e^{-(x_0+\varepsilon)t^2}}{t} \qquad \forall x \in [x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon]$$

e quindi si ha una dominante integrabile in tutto un intorno di x_0, i.e. la continuità di f

Soluzione Esercizio 6.3. Innanzi tutto, l'integranda non ha problemi in $t=0$ perché

$$\lim_{t\to 0}\frac{e^{-xt}-e^{-yt}}{t} = \lim_{t\to 0} e^{-yt}\frac{e^{(y-x)t}-1}{(y-x)t}(y-x) = y-x$$

All'infinito, l'integrale converge per $x, y > 0$ perché un esponenziale di parametro negativo fratto un polinomio è integrabile; inoltre, per

$$(x,y) \in [x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon] \times [y_0-\varepsilon, y_0+\varepsilon] \subset (0,+\infty)\times(0,+\infty)$$

si ha

$$\left|\frac{e^{-xt}-e^{-yt}}{t}\right| \le \frac{e^{-xt}+e^{-yt}}{t} \le \frac{e^{-(x_0-\varepsilon)t}+e^{-(y_0-\varepsilon)t}}{t}$$

che è integrabile, e dunque la funzione è continua

Soluzione Esercizio 6.4.

(6.4.1)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e^{-\frac{x^2}{n}}}{1+x^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{1+x^2} \ \forall x \in \mathbb{R}$$

e la convergenza è uniforme in $[-1,1]$ perché

$$\sup_{x\in[-1,1]} \left| \frac{e^{-\frac{x^2}{n}}-1}{1+x^2} \right| \leq \sup_{x\in[-1,1]} \left| e^{-\frac{x^2}{n}} - 1 \right| = 1 - e^{-\frac{1}{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

e dunque, essendo l'intervallo di integrazione limitato, è possibile scambiare limite e integrale:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-1}^{1} \frac{e^{-\frac{x^2}{n}}}{1+x^2} \mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} \lim_{n\to\infty} \frac{e^{-\frac{x^2}{n}}}{1+x^2} \mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \arctan x \Big|_{-1}^{1} = \frac{\pi}{2}$$

(6.4.2) $\lim_{n\to\infty} \frac{nx^2e^{-nx^2}}{1+nx^2} = 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$, e inoltre

$$\left| \frac{nx^2e^{-nx^2}}{1+nx^2} \right| \leq e^{-nx^2} \leq e^{-x^2}$$

che è integrabile e dunque c'è equidominatezza; inoltre, la convergenza è uniforme in $[-b,-a] \cup [a,b] \ \forall b > a > 0$, perché

$$\sup_{x\in[-b,-a]\cup[a,b]} \left| \frac{nx^2e^{-nx^2}}{1+nx^2} \right| \leq \sup_{x\in[-b,-a]\cup[a,b]} \left| e^{-nx^2} \right| = e^{-na^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

dunque è possibile scambiare limite e integrale su $[0,+\infty)$ e su $(-\infty,0]$, e quindi

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{nx^2e^{-nx^2}}{1+nx^2} \mathrm{d}x &= \lim_{n\to\infty} \int_{0}^{+\infty} \frac{nx^2e^{-nx^2}}{1+nx^2} \mathrm{d}x + \lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{0} \frac{nx^2e^{-nx^2}}{1+nx^2} \mathrm{d}x = \\
&= \int_{0}^{+\infty} \lim_{n\to\infty} \frac{nx^2e^{-nx^2}}{1+nx^2} \mathrm{d}x + \int_{-\infty}^{0} \lim_{n\to\infty} \frac{nx^2e^{-nx^2}}{1+nx^2} \mathrm{d}x = \\
&= \int_{0}^{+\infty} 0 \mathrm{d}x + \int_{-\infty}^{0} 0 \mathrm{d}x = \\
&= 0
\end{aligned}$$

Soluzione Esercizio 6.5.

(6.5.1)

$$f_n(x) = \arctan(nx) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{se } 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

e la convergenza non può essere uniforme perché le f_n sono funzioni continue mentre la funzione limite f non lo è.

(6.5.2)

$$\begin{aligned}
\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x &= \int_0^1 \arctan(nx)\mathrm{d}x = x\arctan(nx)\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{nx}{1+n^2x^2}\mathrm{d}x = \\
&= \arctan(n) - \frac{1}{2n}\int_0^1 \frac{2n^2x}{1+n^2x^2}\mathrm{d}x = \arctan(n) - \frac{1}{2n}\log(1+n^2x^2)\Big|_0^1 = \\
&= \arctan(n) - \frac{\log(1+n^2x^2)}{2n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{\pi}{2} = \int_0^1 \frac{\pi}{2}\mathrm{d}x = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\mathrm{d}x
\end{aligned}$$