Tutorato di AM210 - Soluzioni

A.A. 2011/2012 — Docente: Prof. G. Mancini
Tutori: Vincenzo Morinelli, Gianluca Lauteri

Tutorato 2: Limiti e continuità in più variabili

Testi e soluzioni dei tutorati disponibili all'indirizzo `http://am210-1112.blogspot.com/`

Soluzione Esercizio 2.1.

(2.1.1) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$ non esiste. infatti se $x=0$, $\frac{xy}{x^2+y^2}=0$ mentre lungo la traiettoria $x=y$ si ha

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to 0} \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}$$

(2.1.2) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^4}{x^4+y^4} = 0$. Infatti osserviamo che: $\left|\frac{x^2y^4}{x^4+y^4}\right| \leq \frac{x^2(y^4+x^4)}{x^4+y^4} = x^2 \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$

(2.1.3) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y^2}{x^6+y^2} = 0$ infatti:$\left|\frac{x^3y^2}{x^6+y^2}\right| \leq \left|\frac{x^3(y^2+x^6)}{x^6+y^2}\right| = \left|x^3\right| \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$

(2.1.4) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4y}{x^8+2y^2}$ non esiste. Sia $f(x,y)=\frac{x^4y}{x^8+2y^2}$: lungo la traiettoria $x=0$ si ha $f(0,y)=0$ mentre lungo la traiettoria $y=x^4$ è $f(x,x^4)=\frac{x^8}{3x^8}$ e $\lim_{x\to 0}\frac{x^8}{3x^8}=\frac{1}{3}$

(2.1.5) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{3x^2}e^{3y^2}-1}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{3x^2+3y^2}-1}{x^2+y^2}$ passando in coordinate polari il limite diventa: $\lim_{\varrho\to 0}\frac{e^{3\varrho^2}-1}{\varrho^2}=3$

(2.1.6) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin\left(4xy^{\frac{3}{2}}\right)}{x^2+y^2} = 0$. Infatti:

$$\left|\frac{\sin\left(4xy^{\frac{3}{2}}\right)}{x^2+y^2}\right| \leq \frac{4\left|x\right|\left|y\right|^{\frac{3}{2}}}{x^2+y^2} = \frac{4\left|x\right|\left|y\right|\left|y\right|^{\frac{1}{2}}}{x^2+y^2} \leq \frac{4(x^2+y^2)\left|y\right|^{\frac{1}{2}}}{x^2+y^2} = 4\sqrt{|y|} \xrightarrow[y\to 0]{} 0$$

Soluzione Esercizio 2.2. Notiamo che tutte le funzioni considerate sono continue su $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$: è quindi sufficiente stabilire la continuità nell'origine:

(2.2.1) In coordinate polari, abbiamo che

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\arctan\left(x^2+y^2\right)}{x^2+y^2} = \lim_{\varrho\to 0}\frac{\arctan\left(\varrho^2\right)}{\varrho^2} \overset{t=\varrho^2}{=} \lim_{t\to 0}\frac{\arctan(t)}{t} = 1$$

e quindi f è continua su tutto $\mathbb{R}^2$

(2.2.2)

$$\left|\frac{\sin(x^3y)}{\sqrt{x^8+y^6}}\right| \leq \frac{\left|x^3y\right|}{(x^8+y^6)^{\frac{1}{2}}} = \frac{|x|^{8\cdot\frac{3}{8}}\,|y|^{6\cdot\frac{1}{6}}}{(x^8+y^6)^{\frac{1}{2}}} \leq \frac{\left(x^8+y^6\right)^{\frac{3}{8}}\left(x^8+y^6\right)^{\frac{1}{6}}}{(x^8+y^6)^{\frac{1}{2}}} = \left(x^8+y^6\right)^{\frac{1}{24}} \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$$

SOLUZIONE ESERCIZIO 2.3. Abbiamo, per Hölder

$$\sum_{n\geq 1}\left|\frac{a_n}{n}\right| \leq \left(\sum_{n\geq 1}|a_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}} < \infty$$

Un controesempio si ottiene considerando $a_n = n^{-\frac{1}{4}}$, come si verifica immediatamente

SOLUZIONE ESERCIZIO 2.4.

(2.4.1) A non è né aperto né chiuso, ha interno vuoto e $\partial A = \left\{\frac{1}{n}\right\}\cup\{0\}$. A' è chiuso, ha interno vuoto e coincide con la sua frontiera

(2.4.2) B non è né aperto né chiuso, $\mathrm{Int}\,(B) = \left\{x^2+y^2<1, \quad x>0,\ y>0\right\}$ e

$$\partial B = ([0,1]\times\{0\})\cup(\{0\}\times[0,1])\cup\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,\middle|\,x^2+y^2=1,\ x\geq 0,\ y\geq 0\right\}$$

(cfr. Figura 1)

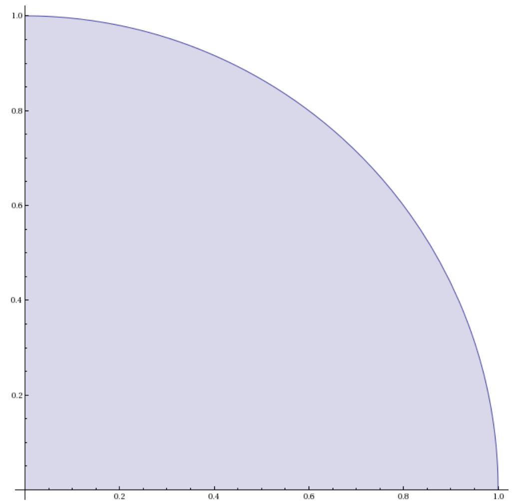

Figura 1: L'insieme B

(2.4.3) C è aperto, quindi $\mathrm{Int}\,(C) = C$ e $\partial C = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+\,\middle|\,y=\frac{1}{x}\right\}$ (cfr. Figura (2))

(2.4.4) D non è né aperto né chiuso, $\mathrm{Int}(D) = \left\{(x,y)\,\middle|\,1<x^2+y^2<2\right\}$ e $\partial D = \left\{x^2+y^2=1\right\}\cup\left\{x^2+y^2=2\right\}$ (cfr. Figura (3))

(2.4.5) E è chiuso, $\mathrm{Int}(E) = \{0<x<1\}$ e $\partial E = \{x=0\}\cup\{x=1\}\cup\{(\pi,\pi)\}$

SOLUZIONE ESERCIZIO 2.5. Sia $\{f_n\}\subset M$ tale che $||f-f_n||\to 0$, cioé $\forall\varepsilon>0, \exists N\ :\ ||f-f_n||<\varepsilon \quad \forall n\geq N$, i.e. $\sup_{x\in[0,1]}|f(x)-f_n(x)|<\varepsilon$, e quindi $|f(x)-f_n(x)|\leq\varepsilon \quad \forall x\in[0,1]$, e quindi

$$-\varepsilon+f_n(x)<f(x)<\varepsilon+f_n(x) \tag{2.1}$$

Integrando la (2.1) tra 0 e $\frac{1}{2}$ otteniamo

$$-\frac{\varepsilon}{2}+\int_0^{\frac{1}{2}}f_n(x)\mathrm{d}x \leq \int_0^{\frac{1}{2}}f(x)\mathrm{d}x \leq \int_0^{\frac{1}{2}}f_n(x)\mathrm{d}x+\frac{\varepsilon}{2} \tag{2.2}$$

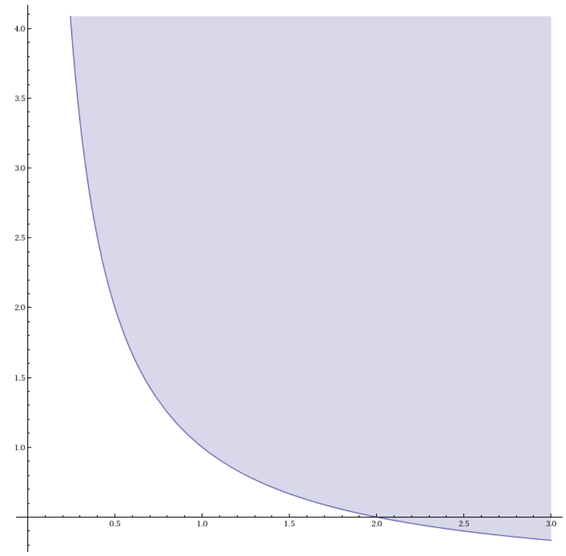

Figura 2: L'insieme C

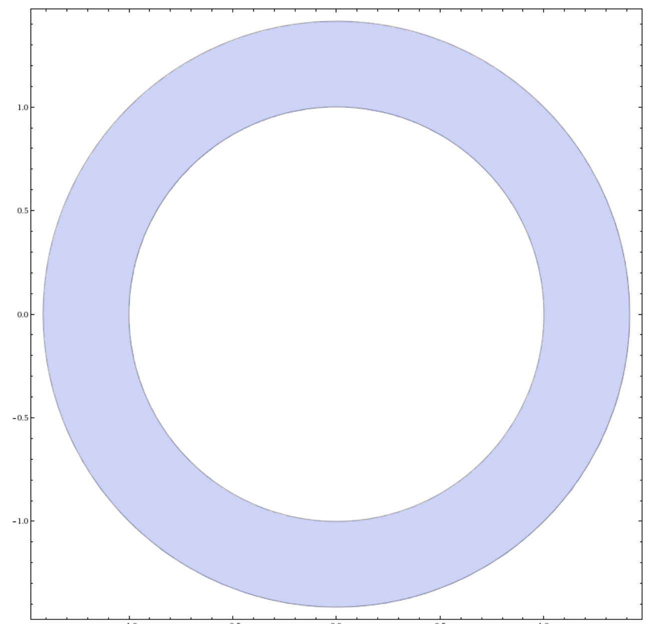

Figura 3: L'insieme D

mentre integrando tra $\frac{1}{2}$ e 1 si ha

$$-\frac{\varepsilon}{2}+\int_{\frac{1}{2}}^{1} f_n(x)\mathrm{d}x \leq \int_{\frac{1}{2}}^{1} f(x)\mathrm{d}x \leq \int_{\frac{1}{2}}^{1} f_n(x)\mathrm{d}x+\frac{\varepsilon}{2} \tag{2.3}$$

Sottraendo membro a membro la (2.2) con la (2.3) otteniamo

$$1 = Tf_n \leq Tf \leq Tf_n = 1$$

i.e. $Tf = 1$. Quindi M è chiuso

Soluzione Esercizio 2.6.
Prima di tutto, notiamo che $D_{\gamma,\tau} \cap \mathbb{Q} = \emptyset$, e quindi $\mathrm{Int}\,(D_{\gamma,\tau}) = \emptyset$: altrimenti, $D_{\gamma,\tau}$ conterrebbe una palla aperta che a sua volta contiene in particolare numeri razionali.

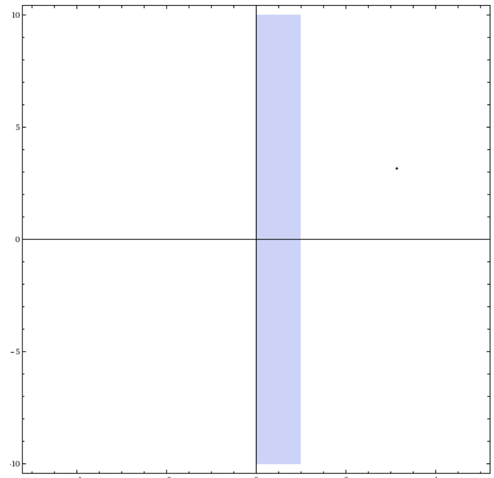

Figura 4: L'insieme E (naturalmente, la striscia verticale si estende all'infinito)

Proviamo ora che $D_{\gamma,\tau}$ è chiuso, i.e. che se $\{\omega_n\} \subset D_{\gamma,\tau}$ è t.c. $\omega_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \omega \in \mathbb{R}$, allora $\omega \in D_{\gamma,\tau}$. Infatti, $\forall \varepsilon > 0\, \exists N > 0$ t.c. $|\omega_n - \omega| < \varepsilon \quad \forall n > N$. Allora, presi $(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^+$

$$\begin{aligned}\left|\omega - \frac{p}{q}\right| &= \left|\omega - \omega_n + \omega_n - \frac{p}{q}\right| = \left|\left(\omega_n - \frac{p}{q}\right) - (\omega_n - \omega)\right| \geq \\ &\geq \left|\left|\omega_n - \frac{p}{q}\right| - |\omega_n - \omega|\right| \geq \left|\frac{\gamma}{q^\tau} - \varepsilon\right|\end{aligned}$$

data l'arbitrarietà di ε, si ha la tesi