Tutorato di AM210

A.A. 2011/2012 — Docente: Prof. G. Mancini
Tutori: Vincenzo Morinelli, Gianluca Lauteri

Tutorato 2: Limiti e continuità in più variabili

Testi e soluzioni dei tutorati disponibili all'indirizzo `http://am210-1112.blogspot.com/`

Esercizio 2.1. Calcolare (se esistono) i seguenti limiti:

(2.1.1) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$

(2.1.2) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^4}{x^4+y^4}$

(2.1.3) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y^2}{x^6+y^2}$

(2.1.4) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4y}{x^8+2y^2}$

(2.1.5) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{3x^2}e^{3y^2}-1}{x^2+y^2}$

(2.1.6) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin\left(4xy^{\frac{3}{2}}\right)}{x^2+y^2}$

Esercizio 2.2. Discutere la continuità delle seguenti funzioni (definite su tutto $\mathbb{R}^2$)

(2.2.1) $f(x,y) := \begin{cases} \frac{\arctan\left(x^2+y^2\right)}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y)\neq(0,0) \\ 1 & \text{se } (x,y)=(0,0) \end{cases}$

(2.2.2) $f(x,y) := \begin{cases} \frac{\sin\left(x^3y\right)}{\sqrt{x^8+y^6}} & \text{se } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y)=(0,0) \end{cases}$

Esercizio 2.3. Ricordando la *disuguaglianza di Hölder*

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1 \quad p,q\in[1,\infty]\,,\ \{x_n\}\in\ell^p,\ \ \{y_n\}\in\ell^q \quad \Rightarrow \quad \sum_{n\geq1}|x_ny_n| \leq \left(\sum_{n\geq1}|x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{n\geq1}|y_n|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

provare che se $\{a_n\}\in\ell^2$, allora $\displaystyle\sum_{n\geq1}\left|\frac{a_n}{n}\right|<\infty$. Provare anche che il viceversa non è vero, i.e. che $\displaystyle\sum_{n\geq1}\left|\frac{a_n}{n}\right|<\infty$ non implica $\{a_n\}\in\ell^2$

Esercizio 2.4. Disegnare i seguenti insiemi, verificare se sono aperti o chiusi e determinarne interno e frontiera

(2.4.1) $A := \left\{\frac{1}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}^+}\subset\mathbb{R}$ e $A' := \{0\}\cup\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}^+}\subset\mathbb{R}$

(2.4.2) $B := \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \middle| x^2+y^2<1, \quad x\geq0,\ y\geq0\right\}$

(2.4.3) $C := \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \middle| y>\frac{1}{x}, \quad x>0\right\}$

(2.4.4) $D := \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \middle| 1\leq x^2+y^2<2\right\}$

(2.4.5) $E := \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \middle| 0\leq x\leq1,\ \ y\in\mathbb{R}\right\}\cup\{(\pi,\pi)\}$

Esercizio 2.5. Si consideri lo spazio $\mathcal{C} := \left(\mathscr{C}\left([0,1]\,,[0,1]\right),||\cdot||\right)$, dove $||\cdot|| := ||\cdot||_\infty$ e $||\cdot||_\infty$ è l'usuale norma dell'estremo superiore ($||f||_\infty := \sup_{x\in[0,1]}|f(x)|$). Si definisca l'operatore

$$\begin{array}{cccc} T: & \mathcal{C} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & f & \mapsto & \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\mathrm{d}x - \int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)\mathrm{d}x \end{array}$$

e si ponga

$$M := \left\{f\in\mathcal{C} \middle| Tf=1\right\}$$

Provare che M è chiuso in $\mathcal{C}$

Esercizio 2.6. (facoltativo) Siano $\gamma>0, \tau>1$. Provare che l'insieme dei reali (γ,τ)-*diofantei*

$$D_{\gamma,\tau} := \left\{\omega\in\mathbb{R} \middle| \left|\omega-\frac{p}{q}\right| \geq \frac{\gamma}{q^\tau} \quad \forall\,(p,q)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{N}^+\right\}$$

è chiuso e che $\mathrm{Int}\left(D_{\gamma,\tau}\right)=\emptyset$ (si può assumere $D_{\gamma,\tau}\neq\emptyset$)