Tutorato di AM210 - Soluzioni

A.A. 2011/2012 — Docente: Prof. G. Mancini
Tutori: Vincenzo Morinelli, Gianluca Lauteri

Tutorato 1: Spazi metrici

SOLUZIONE ESERCIZIO 1.1. Supponiamo $q = \infty$: se $x_n \notin \ell^p$ allora ovviamente $\|x\|_\infty \leq \|x\|_p = +\infty$, se invece $x \in \ell^p$ allora $x(k) \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$ e dunque $\|x\|_\infty := \sup_{k\in\mathbb{N}} |x(k)| = |x(\bar{k})|$ per $k \in \mathbb{N}$ opportuno e dunque

$$\|x\|_\infty = |x(\bar{k})| = \left(|x(\bar{k})|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x(k)|\right)^{\frac{1}{p}} = \|x\|_p$$

Se invece $q < +\infty$ allora

$$\|x\|_q = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x(k)|^q\right)^{\frac{1}{q}} \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} \|x\|_\infty^{q-p} |x(k)|^p\right)^{\frac{1}{q}} = \|x\|_\infty^{\frac{q-p}{q}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x(k)|^p\right)^{\frac{1}{q}} =$$
$$= \|x\|_\infty^{\frac{q-p}{q}} \|x\|_p^{\frac{p}{q}} \leq \|x\|_p^{\frac{q-p}{q}} \|x\|_p^{\frac{p}{q}} = \|x\|_p$$

Dunque, $\|x\|_p < +\infty \Rightarrow \|x\|_q \leq \|x\|_p < +\infty \ \forall 1 \leq p \leq q \leq \infty$, cioè $x \in \ell^p \Rightarrow x \in \ell^q$.

SOLUZIONE ESERCIZIO 1.2. Abbiamo

$$\begin{aligned} ||x_n||_1 &= \textstyle\sum_{k=0}^{\infty} |x_n(k)| = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-\frac{k}{n}}}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{\infty} \left(e^{-\frac{1}{n}}\right)^k = \frac{1}{n} \frac{1}{1-e^{-\frac{1}{n}}} = \frac{\frac{1}{n}}{1-e^{-\frac{1}{n}}} \\ ||x_n||_2^2 &= \textstyle\sum_{k=0}^{\infty} |x_n(k)|^2 = \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^{\infty} \left(e^{-\frac{2}{n}}\right)^k = \frac{1}{n^2} \frac{1}{1-e^{-\frac{2}{n}}} = \frac{1}{n} \frac{\frac{1}{n}}{1-e^{-\frac{2}{n}}} \end{aligned}$$

Poiché $||x_n||_2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, x_n converge a 0 in ℓ_2

Invece, x_n non converge in ℓ_1: infatti, se per assurdo $\exists x \in \ell^1$ t.c. $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{\ell_1} x$, allora

$$||x_n - x||_2 \overset{(1.1)}{\leq} ||x_n - x||_1 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

e quindi $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$ anche in ℓ_2. Ma allora, poiché il limite in ℓ_2 è unico, si dovrebbe avere $x = 0$, che è assurdo perché allora

$$||x_n||_1 = ||x_n - x||_1 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

mentre abbiamo visto che

$$||x||_1 = \frac{\frac{1}{n}}{1 - e^{-\frac{1}{n}}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

contraddizione. Il fatto che le due norme non sono equivalenti segue immediatamente dalla definizione

SOLUZIONE ESERCIZIO 1.3. Ricordiamo che $x_n(k) = \begin{cases} 1 & \text{se } n = k \\ 0 & \text{se } n \neq k \end{cases}$. Quindi

(1.3.1) $x_n \in \ell^p \ \forall 1 \leq p \leq \infty$ perché $\|x_n\|_\infty = \sup_{k\in\mathbb{N}} |x_n(k)| = 1$ e $\|x_n\|_p = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_n(k)|^p\right)^{\frac{1}{p}} = (1^p)^{\frac{1}{p}} = 1.$

(1.3.2) x_n è una successione limitata in ℓ^p $\forall 1 \le p \le \infty$ perché, per quanto visto al punto precedente, $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\|_p = 1 < +\infty$ $\forall 1 \le p \le \infty$.

(1.3.3) x_n non ha sottosuccessioni convergenti in ℓ^p per alcun $1 \le p \le \infty$ perché non ha sottosuccessioni di Cauchy, in quanto $n \neq m$ implica

$$(x_n - x_m)(k) = \begin{cases} 1 & \text{se } k = n \\ -1 & \text{se } k = m \\ 0 & \text{se } n \neq k \neq m \end{cases}$$

e dunque $\|x_n - x_m\|_p = \begin{cases} 2^{\frac{1}{p}} & \text{se } p < \infty \\ 1 & \text{se } p = \infty \end{cases}$, quindi $\|x_n - x_m\|_p \nrightarrow 0$ per $n, m \to \infty, \quad n \neq m$.

Soluzione Esercizio 1.4.

$$\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle = \langle x,x\rangle + \langle y,y\rangle + 2\langle x,y\rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2, \text{ poiché } \langle x,y\rangle = 0$$

Soluzione Esercizio 1.5.

$$\begin{aligned}\left\|\frac{x+y}{2}\right\|^2 + \left\|\frac{x-y}{2}\right\|^2 &= \left\langle \frac{x+y}{2}, \frac{x+y}{2}\right\rangle + \left\langle \frac{x-y}{2}, \frac{x-y}{2}\right\rangle = \frac{\langle x+y, x+y\rangle}{4} + \frac{\langle x-y, x-y\rangle}{4} = \\ &= \frac{\langle x,x\rangle + \langle y,y\rangle + 2\langle x,y\rangle}{4} + \frac{\langle x,x\rangle + \langle y,y\rangle - 2\langle x,y\rangle}{4} = \\ &= \frac{\|x\|^2}{4} + \frac{\|y\|^2}{4} + \frac{\langle x,y\rangle}{2} + \frac{\|x\|^2}{4} + \frac{\|y\|^2}{4} - \frac{\langle x,y\rangle}{2} = \frac{\|x\|^2 + \|y\|^2}{2}\end{aligned}$$

Soluzione Esercizio 1.6.

"$\Rightarrow$": Sia A un aperto di $\mathbb{R}^m$; allora $\forall y \in A$ si ha che $B_\varepsilon(y) \subset A$, in particolare se $y = f(x_0)$ per qualche $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Poi, se f è continua, allora $\|x - x_0\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon$, cioè $f(B_\delta(x_0)) \subset B_\varepsilon(f(x_0)) \subset A$, ovvero $B_\delta(x_0) \subset f^{-1}(A)$, cioè $f^{-1}(A)$ è aperto, essendo x_0 arbitrario.

"$\Leftarrow$": Sia $x_0 \in \mathbb{R}^n$; allora $B_\varepsilon(f(x_0))$ è aperto in $\mathbb{R}^m$ e dunque $f^{-1}(B_\varepsilon(f(x_0)))$ è aperto, cioè $\forall x \in f^{-1}(B_\varepsilon(f(x_0)))$ $\exists \delta > 0$ t.c. $B_\delta(x_0) \subset f^{-1}(B_\varepsilon(f(x_0)))$, ma allora $f(B_\delta(x_0)) \subset B_\varepsilon(f(x_0))$, cioè f è continua in x_0, ma essendo x_0 arbitrario, concludiamo che f è continua.