Serie di Fourier: esercizi svolti

Gli esercizi contrassegnati con il simbolo * presentano un grado di difficoltà maggiore.

Esercizio 1. Scrivere la serie di Fourier delle seguenti funzioni e studiarne la convergenza quadratica, puntuale e uniforme:

a) $f(x) = x - [x]$, dove $[x]$ è la parte intera di x

$$\left[\begin{array}{l} \displaystyle\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin(2\pi n x), \quad \text{converge quadraticamente a } f \text{ su } \mathbb{R}, \\ \text{converge puntualmente a } S(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \notin \mathbb{Z}, \\ \frac{1}{2} & \text{se } x \in \mathbb{Z}, \end{cases} \\ \text{converge uniformemente a } f \text{ su } [a,b],\ n < a < b < n+1,\ n \in \mathbb{Z} \end{array}\right]$$

b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è la funzione ottenuta prolungando per periodicità la funzione

$$g(x) = \begin{cases} x & \text{se } -\pi < x < \pi, \\ 0 & \text{se } x = \pm\pi \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{l} \displaystyle -2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\sin nx, \text{ converge puntualmente e quadraticamente a } f \text{ su } \mathbb{R}, \\ \text{converge uniformemente a } f \text{ su } [a,b],\ (2k+1)\pi < a < b < (2k+3)\pi,\ k \in \mathbb{Z} \end{array}\right]$$

c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è la funzione ottenuta prolungando per periodicità la funzione

$$g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } -\pi < x < \pi, \\ 0 & \text{se } x = \pm\pi \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{l} \displaystyle\frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx, \quad \text{converge quadraticamente a } f \text{ su } \mathbb{R}, \\ \text{converge puntualmente a } S(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \neq (2k+1)\pi, \\ \pi^2 & \text{se } x = (2k+1)\pi, \end{cases} \quad \forall k \in \mathbb{Z}, \\ \text{converge uniformemente a } f \text{ su } [a,b],\ (2k+1)\pi < a < b < (2k+3)\pi,\ k \in \mathbb{Z} \end{array}\right]$$

d) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è la funzione ottenuta prolungando per periodicità la funzione

$$g(x) = \begin{cases} x^4 & \text{se } -\pi < x < \pi, \\ 0 & \text{se } x = \pm\pi \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{l} \dfrac{\pi^4}{5} + 8\pi^2 \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx - 48 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^4} \cos nx, \\ \text{converge quadraticamente a } f \text{ su } \mathbb{R}, \\ \text{converge puntualmente a } S(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \neq (2k+1)\pi \\ \pi^4 & \text{se } x = (2k+1)\pi, \end{cases} \qquad \forall k \in \mathbb{Z}, \\ \text{converge uniformemente a } f \text{ su } [a,b],\ (2k+1)\pi < a < b < (2k+3)\pi,\ k \in \mathbb{Z} \end{array} \right]$$

**e*) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è la funzione ottenuta prolungando per periodicità la funzione

$$g(x) = \begin{cases} x\cos x & \text{se } -\pi \le x < \pi, \\ \pi & \text{se } x = \pi \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{l} -\dfrac{1}{2}\sin x - 2 \displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n\, n}{n^2-1} \sin nx, \quad \text{converge quadraticamente a } f \text{ su } \mathbb{R}, \\ \text{converge puntualmente a } S(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \neq (2k+1)\pi \\ 0 & \text{se } x = (2k+1)\pi, \end{cases} \qquad \forall k \in \mathbb{Z}, \\ \text{converge uniformemente a } f \text{ su } [a,b],\ (2k+1)\pi < a < b < (2k+3)\pi,\ k \in \mathbb{Z} \end{array} \right]$$

f) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è la funzione ottenuta prolungando per periodicità la funzione

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \\ -1 & \text{se } x \in \left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right], \\ 0 & \text{se } x = \pm\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{l} \dfrac{4}{\pi} \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \cos(2n+1)x, \quad \text{converge quadraticamente a } f \text{ su } \mathbb{R}, \\ \text{converge puntualmente a } f \text{ su } \mathbb{R}, \\ \text{converge uniformemente a } f \text{ su } [a,b],\ (2k+1)\frac{\pi}{2} < a < b < (2k+3)\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z} \end{array} \right]$$

g) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è la funzione ottenuta prolungando per periodicità la funzione $g(x) = |x|$, definita per ogni $x \in [-\pi, \pi]$

$$\left[\begin{array}{l} \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{4}{\pi} \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \cos(2n+1)x, \\ \text{converge puntualmente, quadraticamente e uniformemente a } f \text{ su } \mathbb{R} \end{array} \right]$$

$h)$ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è la funzione ottenuta prolungando per periodicità la funzione

$$g(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } -\pi < x < 0, \\ 0 & \text{se } x = 0, \pm\pi, \\ 1 & \text{se } 0 < x < \pi \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{l} \dfrac{4}{\pi} \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{2n+1} \sin{(2n+1)x}, \\ \text{converge puntualmente e quadraticamente a } f \text{ su } \mathbb{R} \\ \text{converge uniformemente a } f \text{ su } [a,b],\ k\pi < a < b < (k+1)\pi,\ k \in \mathbb{Z} \end{array} \right]$$

Svolgimento

$a)$ La funzione $f(x) = x - [x]$ è periodica di periodo 1 ed in particolare $f(x) = x$ per ogni $x \in [0,1)$. Quindi f è continua in $(n, n+1)$ ed è discontinua, con discontinuità di tipo salto, in $x = n$, per ogni $n \in \mathbb{Z}$.

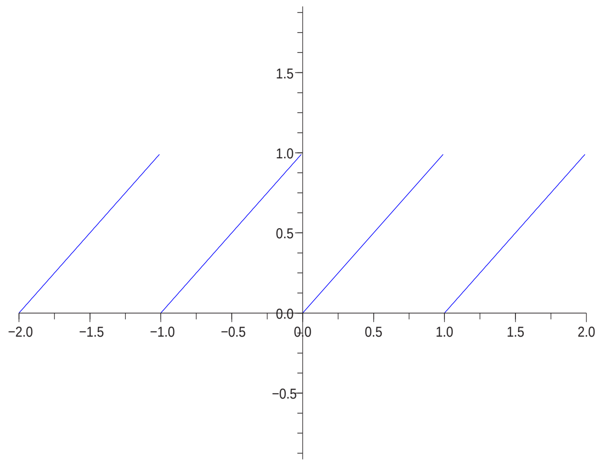

Fig. 1: Grafico di f.

Studiamo inizialmente la convergenza della serie di Fourier di f.

Osserviamo che $f_{|[0,1]} \in L^2(0,1)$, ossia che $\int_0^1 [f(x)]^2\, dx < +\infty$. Infatti,

$$\int_0^1 [f(x)]^2\, dx = \int_0^1 x^2\, dx = \frac{1}{3}.$$

Ne segue che la serie di Fourier di f converge quadraticamente a f su $\mathbb{R}$.

Studiamo ora la convergenza puntuale della serie di Fourier di f. Essendo f continua in $(n, n+1)$, per ogni $n \in \mathbb{Z}$, si ha che la serie di Fourier di f converge a f in $(n, n+1)$, per ogni $n \in \mathbb{Z}$. Consideriamo ora $x = n \in \mathbb{Z}$. Si ha che

$$f(n^-) = \lim_{x\to n^-} f(x) = 1, \quad f(n^+) = \lim_{x\to n^+} f(x) = 0,$$

$$f'(n^-) = \lim_{x\to n^-} \frac{f(x) - f(n^-)}{x-n} = 1, \quad f'(n^+) = \lim_{x\to n^+} \frac{f(x) - f(n^+)}{x-n} = 1.$$

Quindi la serie di Fourier di f converge in $x = n \in \mathbb{Z}$ a $\frac{1}{2}[f(n^-) + f(n^+)] = \frac{1}{2}$. Pertanto la serie di Fourier di f converge puntualmente a

$$S(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \notin \mathbb{Z}, \\ \frac{1}{2} & \text{se } x \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Inoltre, essendo f di classe C^1 in ogni intervallo $(n, n+1)$, per ogni $n \in \mathbb{Z}$, la serie di Fourier di f converge uniformemente a f su $[a, b]$, con $n < a < b < n+1$, per ogni $n \in \mathbb{Z}$. Poichè f non è continua su $[n, n+1]$, la convergenza non è uniforme su questi intervalli.

Determiniamo ora la serie di Fourier di f. Essendo f periodica di periodo 1, la serie di Fourier di f è della forma

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(2n\pi x) + b_n \sin(2n\pi x)],$$

dove

$$a_0 = \int_0^1 f(x)\,dx,$$

e per ogni $n \geq 1$

$$a_n = 2\int_0^1 f(x)\cos(2n\pi x)\,dx, \qquad b_n = 2\int_0^1 f(x)\sin(2n\pi x)\,dx.$$

Si ha che

$$a_0 = \int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2},$$

$$\forall n \geq 1: \qquad a_n = 2\int_0^1 f(x)\cos(2n\pi x)\,dx = 2\int_0^1 x\cos(2n\pi x)\,dx =$$

integrando per parti

$$= \left[\frac{1}{n\pi} x \sin(2n\pi x)\right]_0^1 - \frac{1}{n\pi}\int_0^1 \sin(2n\pi x)\,dx = \left[\frac{1}{2n^2\pi^2}\cos(2n\pi x)\right]_0^1 = 0,$$

$$\forall n \geq 1: \qquad b_n = 2\int_0^1 f(x)\sin(2n\pi x)\,dx = 2\int_0^1 x\sin(2n\pi x)\,dx =$$

integrando per parti

$$= \left[-\frac{1}{n\pi}x\cos(2n\pi x)\right]_0^1 + \frac{1}{n\pi}\int_0^1 \cos(2n\pi x)\,dx =$$

$$= -\frac{1}{n\pi} - \left[\frac{1}{2n^2\pi^2}\sin(2n\pi x)\right]_0^1 = -\frac{1}{n\pi}.$$

Quindi la serie di Fourier di f è

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin(2n\pi x).$$

b) La funzione f è periodica di periodo 2π. Inoltre f è continua in $](2k+1)\pi, (2k+3)\pi[$, per ogni $k \in \mathbb{Z}$, ed è discontinua, con discontinuità di tipo salto, in $x = (2k+1)\pi$, per ogni $k \in \mathbb{Z}$.

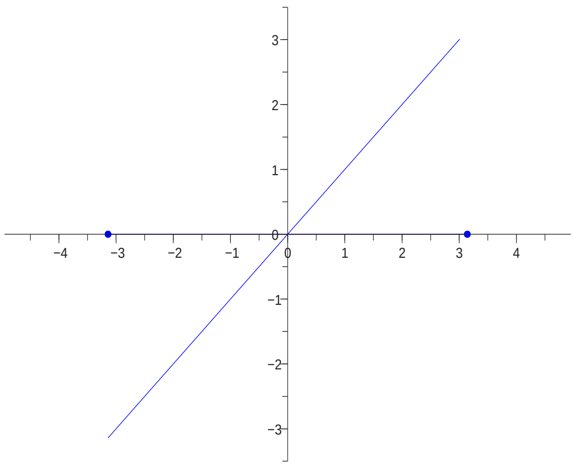

Fig. 2: Grafico di g.

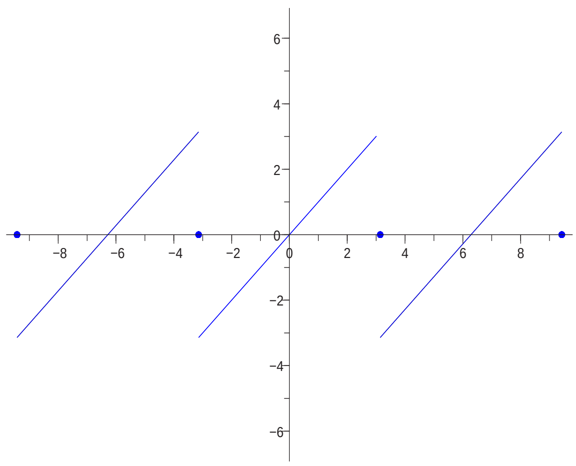

Fig. 3: Grafico di f.

Studiamo inizialmente la convergenza della serie di Fourier di f.

Osserviamo che $f_{|[-\pi,\pi]} \in L^2(-\pi,\pi)$, ossia che $\int_{-\pi}^{\pi} [f(x)]^2\, dx < +\infty$. Infatti,

$$\int_{-\pi}^{\pi} [f(x)]^2\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} x^2\, dx = \frac{2}{3}\pi^3.$$

Ne segue che la serie di Fourier di f converge quadraticamente a f su $\mathbb{R}$.

Studiamo ora la convergenza puntuale della serie di Fourier di f. Essendo f continua in $](2k+1)\pi, (2k+3)\pi[$, per ogni $k \in \mathbb{Z}$, si ha che la serie di Fourier di f converge a f in $](2k+1)\pi, (2k+3)\pi[$, per ogni $k \in \mathbb{Z}$. Consideriamo ora $x_k = (2k+1)\pi$, per ogni $k \in \mathbb{Z}$. Si ha che

$$f(x_k^-) = \lim_{x \to x_k^-} f(x) = \pi, \qquad f(x_k^+) = \lim_{x \to x_k^+} f(x) = -\pi,$$

$$f'(x_k^-) = \lim_{x \to x_k^-} \frac{f(x) - f(x_k^-)}{x - x_k} = 1, \qquad f'(x_k^+) = \lim_{x \to x_k^+} \frac{f(x) - f(x_k^+)}{x - x_k} = 1.$$

Quindi la serie di Fourier di f converge in $x_k = (2k+1)\pi$, per ogni $k \in \mathbb{Z}$, a $\frac{1}{2}[f(x_k^-) + f(x_k^+)] = 0 = f(x_k)$. Pertanto la serie di Fourier di f converge puntualmente a f su $\mathbb{R}$. Inoltre, essendo f di classe C^1 in ogni intervallo $](2k+1)\pi, (2k+3)\pi[$, per ogni $k \in \mathbb{Z}$, la serie di Fourier di f converge uniformemente a f su $[a,b]$, con $(2k+1)\pi < a < b < (2k+3)\pi$, per ogni $k \in \mathbb{Z}$. Poichè f

non è continua su $[(2k+1)\pi,(2k+3)\pi]$, la convergenza non è uniforme su questi intervalli.

Determiniamo ora la serie di Fourier di f. Essendo f periodica di periodo 2π e dispari, la serie di Fourier di f è della forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx,$$

dove per ogni $n \geq 1$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\sin nx\,dx =$$

integrando per parti

$$= \frac{2}{\pi}\left(\left[-\frac{1}{n}x\cos nx\right]_0^{\pi} + \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\cos nx\,dx\right) = -\frac{2}{n}\cos n\pi + \frac{2}{n^2\pi}\left[\sin nx\right]_0^{\pi} = -(-1)^n\frac{2}{n}.$$

Quindi la serie di Fourier di f è

$$-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\sin nx.$$

c) La funzione f è periodica di periodo 2π. Inoltre f è continua in $](2k+1)\pi,(2k+3)\pi[$, per ogni $k \in \mathbb{Z}$, ed è discontinua, con discontinuità eliminabile, in $x = (2k+1)\pi$, per ogni $k \in \mathbb{Z}$.

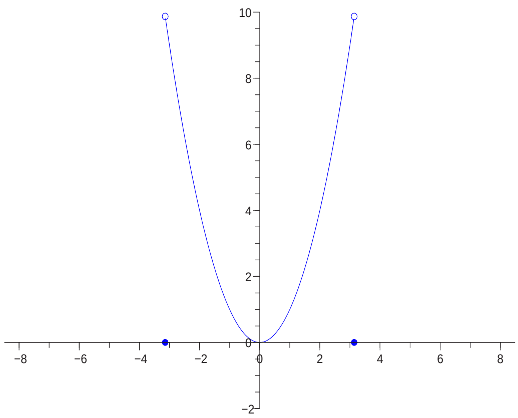

Fig. 4: Grafico di g.

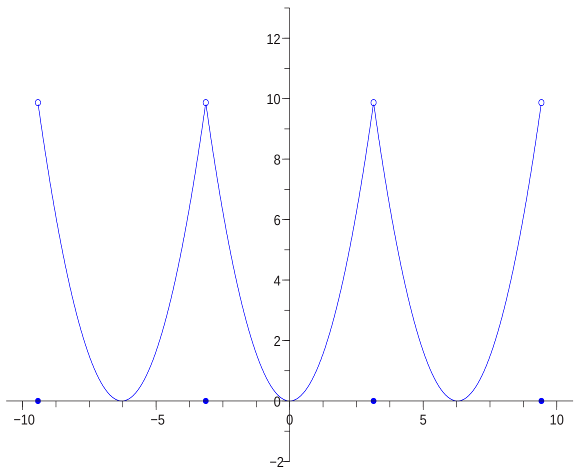

Fig. 5: Grafico di f.

Studiamo inizialmente la convergenza della serie di Fourier di f.

Osserviamo che $f_{|[-\pi,\pi]} \in L^2(-\pi,\pi)$, ossia che $\int_{-\pi}^{\pi} [f(x)]^2\,dx < +\infty$. Infatti,

$$\int_{-\pi}^{\pi} [f(x)]^2\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} x^4\,dx = \frac{2}{5}\pi^5.$$

Ne segue che la serie di Fourier di f converge quadraticamente a f su $\mathbb{R}$.

Studiamo ora la convergenza puntuale della serie di Fourier di f. Essendo f continua in $](2k+1)\pi,(2k+3)\pi[$, per ogni $k \in \mathbb{Z}$, si ha che la serie di Fourier di f converge a f in $](2k+1)\pi,(2k+3)\pi[$, per ogni $k \in \mathbb{Z}$. Consideriamo ora $x_k = (2k+1)\pi$, per ogni $k \in \mathbb{Z}$. Si ha che

$$f(x_k^-) = \lim_{x \to x_k^-} f(x) = \pi^2, \quad f(x_k^+) = \lim_{x \to x_k^+} f(x) = \pi^2,$$

$$f'(x_k^-) = \lim_{x \to x_k^-} \frac{f(x) - f(x_k^-)}{x - x_k} = 2\pi, \quad f'(x_k^+) = \lim_{x \to x_k^+} \frac{f(x) - f(x_k^+)}{x - x_k} = -2\pi.$$

Quindi la serie di Fourier di f converge in $x_k = (2k+1)\pi$, per ogni $k \in \mathbb{Z}$, a $\frac{1}{2}[f(x_k^-) + f(x_k^+)] = \pi^2$. Pertanto la serie di Fourier di f converge puntualmente a

$$S(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \neq (2k+1)\pi, \\ \pi^2 & \text{se } x = (2k+1)\pi, \end{cases} \qquad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Inoltre, essendo f di classe C^1 in ogni intervallo $](2k+1)\pi,(2k+3)\pi[$, per ogni $k \in \mathbb{Z}$, la serie di Fourier di f converge uniformemente a f su $[a,b]$, con $(2k+1)\pi < a < b < (2k+3)\pi$, per ogni $k \in \mathbb{Z}$. Poichè f non è continua su $[(2k+1)\pi,(2k+3)\pi]$, la convergenza non è uniforme su questi intervalli. Poichè S conicide su f tranne che nei punti $x_k = (2k+1)\pi$, per ogni $k \in \mathbb{Z}$, allora la serie di Fourier di S coincide con quella di f ed essendo S di classe C^1 sull'intervallo $[-\pi,\pi]$, si ha che la serie di Fourier di S, e quindi anche quella di f, converge uniformemente a S su $\mathbb{R}$.

Determiniamo ora la serie di Fourier di f. Essendo f periodica di periodo 2π e pari, la serie di Fourier di f è della forma

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx,$$

dove

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{3}$$

e per ogni $n \geq 1$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\cos nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\cos nx\,dx =$$

integrando per parti

$$= \frac{2}{\pi}\left(\left[\frac{1}{n}x^2\sin nx\right]_0^{\pi} - \frac{2}{n}\int_0^{\pi} x\sin nx\,dx\right) =$$

integrando per parti

$$= -\frac{4}{n\pi}\left(\left[-\frac{1}{n}x\cos nx\right]_0^{\pi} + \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\cos nx\,dx\right) =$$

$$= \frac{4}{n^2}\cos n\pi - \frac{4}{n^2\pi}\left[\frac{1}{n}\sin nx\right]_0^{\pi} = (-1)^n\frac{4}{n^2}.$$

Quindi la serie di Fourier di f è

$$\frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx.$$

d) La funzione f è periodica di periodo 2π. Inoltre f è continua in $](2k+1)\pi,(2k+3)\pi[$, per ogni $k \in \mathbb{Z}$, ed è discontinua, con discontinuità eliminabile, in $x = (2k+1)\pi$, per ogni $k \in \mathbb{Z}$.

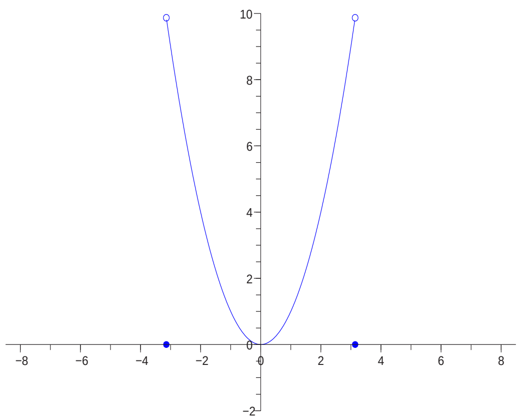

Fig. 6: Grafico[1] di g.

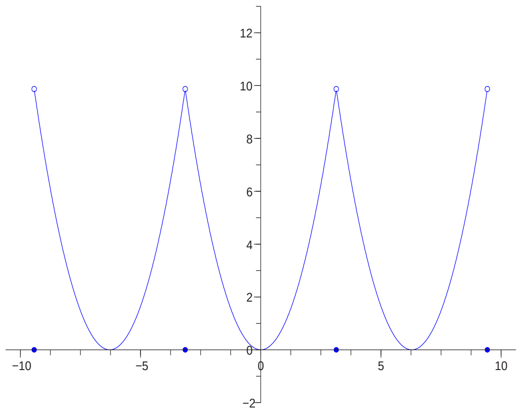

Fig. 7: Grafico[2] di f.

Studiamo inizialmente la convergenza della serie di Fourier di f.

Osserviamo che $f_{|[-\pi,\pi]} \in L^2(-\pi,\pi)$, ossia che $\int_{-\pi}^{\pi} [f(x)]^2\,dx < +\infty$. Infatti,

$$\int_{-\pi}^{\pi} [f(x)]^2\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} x^8\,dx = \frac{2}{9}\pi^9.$$

Ne segue che la serie di Fourier di f converge quadraticamente a f su $\mathbb{R}$.

[1]Il grafico non è in scala
[2]Il grafico non è in scala

Studiamo ora la convergenza puntuale della serie di Fourier di f. Essendo f continua in $](2k+1)\pi, (2k+3)\pi[$, per ogni $k \in \mathbb{Z}$, si ha che la serie di Fourier di f converge a f in $](2k+1)\pi, (2k+3)\pi[$, per ogni $k \in \mathbb{Z}$. Consideriamo ora $x_k = (2k+1)\pi$, per ogni $k \in \mathbb{Z}$. Si ha che

$$f(x_k^-) = \lim_{x \to x_k^-} f(x) = \pi^4, \quad f(x_k^+) = \lim_{x \to x_k^+} f(x) = \pi^4,$$

$$f'(x_k^-) = \lim_{x \to x_k^-} \frac{f(x) - f(x_k^-)}{x - x_k} = 4\pi^3, \quad f'(x_k^+) = \lim_{x \to x_k^+} \frac{f(x) - f(x_k^+)}{x - x_k} = -4\pi^3.$$

Quindi la serie di Fourier di f converge in $x_k = (2k+1)\pi$, per ogni $k \in \mathbb{Z}$, a $\frac{1}{2}[f(x_k^-) + f(x_k^+)] = \pi^4$. Pertanto la serie di Fourier di f converge puntualmente a

$$S(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \neq (2k+1)\pi, \\ \pi^4 & \text{se } x = (2k+1)\pi, \end{cases} \qquad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Inoltre, essendo f di classe C^1 in ogni intervallo $](2k+1)\pi, (2k+3)\pi[$, per ogni $k \in \mathbb{Z}$, la serie di Fourier di f converge uniformemente a f su $[a, b]$, con $(2k+1)\pi < a < b < (2k+3)\pi$, per ogni $k \in \mathbb{Z}$. Poichè f non è continua su $[(2k+1)\pi, (2k+3)\pi]$, la convergenza non è uniforme su questi intervalli. Poichè S conicide su f tranne che nei punti $x_k = (2k+1)\pi$, per ogni $k \in \mathbb{Z}$, allora la serie di Fourier di S coincide con quella di f ed essendo S di classe C^1 sull'intervallo $[-\pi, \pi]$, si ha che la serie di Fourier di S, e quindi anche quella di f, converge uniformemente a S su $\mathbb{R}$.

Determiniamo ora la serie di Fourier di f. Essendo f periodica di periodo 2π e pari, la serie di Fourier di f è della forma

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx,$$

dove

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^4\, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x^4\, dx = \frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{5} x^5\right]_0^{\pi} = \frac{\pi^4}{5}$$

e per ogni $n \geq 1$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx\, dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^4 \cos nx\, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^4 \cos nx\, dx =$$

integrando per parti

$$= \frac{2}{\pi} \left(\left[\frac{1}{n} x^4 \sin nx\right]_0^{\pi} - \frac{4}{n} \int_0^{\pi} x^3 \sin nx\, dx \right) =$$

integrando per parti

$$= -\frac{8}{n\pi}\left(\left[-\frac{1}{n}x^3\cos nx\right]_0^\pi + \frac{3}{n}\int_0^\pi x^2\cos nx\,dx\right) =$$

integrando per parti

$$= (-1)^n\frac{8}{n^2}\pi^2 - \frac{24}{n^3\pi}\left(\left[\frac{1}{n}x^2\sin nx\right]_0^\pi - \frac{2}{n}\int_0^\pi x\sin nx\,dx\right) =$$

integrando per parti

$$= (-1)^n\frac{8}{n^2}\pi^2 + \frac{48}{n^4\pi}\left(\left[-\frac{1}{n}x\cos nx\right]_0^\pi + \frac{1}{n}\int_0^\pi \cos nx\,dx\right) =$$

$$= (-1)^n\frac{8}{n^2}\pi^2 + (-1)^n\frac{48}{n^4} + \frac{48}{n^5\pi}\left[\frac{1}{n}\sin nx\right]_0^\pi = (-1)^n\frac{8}{n^2}\pi^2 + (-1)^n\frac{48}{n^4}.$$

Quindi la serie di Fourier di f è

$$\frac{\pi^4}{5} + 8\pi^2\sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx - 48\sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n}{n^4}\cos nx.$$

*e) La funzione f è periodica di periodo 2π. Inoltre f è continua in $](2k+1)\pi, (2k+3)\pi[$, per ogni $k \in \mathbb{Z}$, ed è discontinua, con discontinuità di tipo salto, in $x = (2k+1)\pi$, per ogni $k \in \mathbb{Z}$.

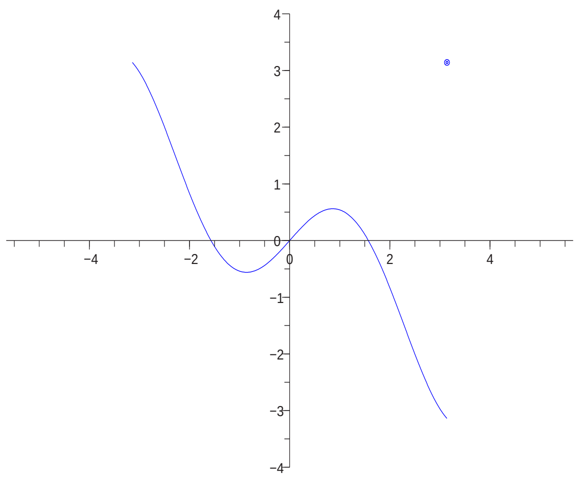

Fig. 8: Grafico di g.

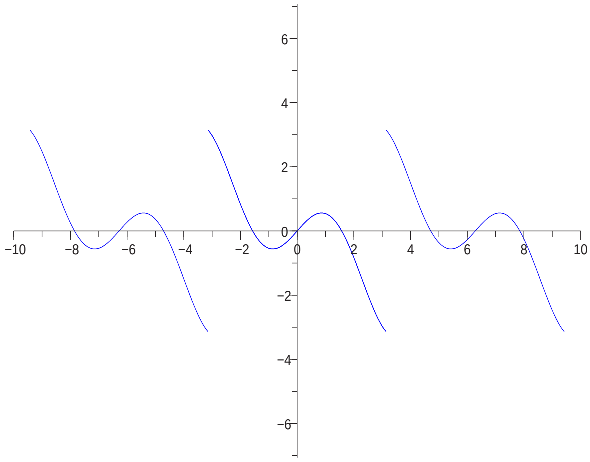

Fig. 9: Grafico di f.

Studiamo inizialmente la convergenza della serie di Fourier di f.

Osserviamo che $f_{|[-\pi,\pi]} \in L^2(-\pi,\pi)$, ossia che $\int_{-\pi}^{\pi} [f(x)]^2\, dx < +\infty$. Infatti, essendo f continua a tratti su $[-\pi,\pi]$, allora f è integrabile (il calcolo esplicito dell'integrale di f^2 non è immediato). Ne segue che la serie di Fourier di f converge quadraticamente a f su $\mathbb{R}$.

Studiamo ora la convergenza puntuale della serie di Fourier di f. Essendo f continua in $](2k+1)\pi,(2k+3)\pi[$, per ogni $k \in \mathbb{Z}$, si ha che la serie di Fourier di f converge a f in $](2k+1)\pi,(2k+3)\pi[$, per ogni $k \in \mathbb{Z}$. Consideriamo ora $x_k = (2k+1)\pi$, per ogni $k \in \mathbb{Z}$. Si ha che

$$f(x_k^-) = \lim_{x\to x_k^-} f(x) = -\pi, \quad f(x_k^+) = \lim_{x\to x_k^+} f(x) = \pi,$$

$$f'(x_k^-) = \lim_{x\to x_k^-} \frac{f(x)-f(x_k^-)}{x-x_k} = -1, \quad f'(x_k^+) = \lim_{x\to x_k^+} \frac{f(x)-f(x_k^+)}{x-x_k} = -1.$$

Quindi la serie di Fourier di f converge in $x_k = (2k+1)\pi$, per ogni $k \in \mathbb{Z}$, a $\frac{1}{2}[f(x_k^-)+f(x_k^+)] = 0$. Pertanto la serie di Fourier di f converge puntualmente a

$$S(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \neq (2k+1)\pi, \\ 0 & \text{se } x = (2k+1)\pi, \end{cases} \qquad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Inoltre, essendo f di classe C^1 in ogni intervallo $](2k+1)\pi,(2k+3)\pi[$, per ogni $k \in \mathbb{Z}$, la serie di Fourier di f converge uniformemente a f su $[a,b]$, con $(2k+1)\pi <$

$a < b < (2k+3)\pi$, per ogni $k \in \mathbb{Z}$. Poichè f non è continua su $[(2k+1)\pi, (2k+3)\pi]$, la convergenza non è uniforme su questi intervalli.

Determiniamo ora la serie di Fourier di f. Essendo f periodica di periodo 2π e dispari, la serie di Fourier di f è della forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx,$$

dove per ogni $n \geq 1$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\, dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\cos x \sin nx\, dx \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos x\sin nx\, dx. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Calcoliamo le primitive di $x\cos x\sin nx$ su $\mathbb{R}$. Integrando per parti si ha che

$$\int x\cos x\sin nx\, dx = x\int \cos x\sin nx\, dx - \int\left(\int \cos x\sin nx\, dx\right) dx, \tag{1.2}$$

dove $\int \cos x\sin nx\, dx$ indica una generica primitiva di $\cos x\sin nx$ su $\mathbb{R}$. Calcoliamo queste primitive. Integrando per parti (*abbr. p.p.*) si ha che

$$\begin{aligned} \int \cos x\sin nx\, dx &\overset{p.p.}{=} \sin x\sin nx - \frac{1}{n}\int \sin x\cos nx\, dx \\ &\overset{p.p.}{=} \sin x\sin nx - \frac{1}{n}\left(-\cos x\cos nx - \frac{1}{n}\int \cos x\sin nx\, dx\right) \\ &= \sin x\sin nx + \frac{1}{n}\cos x\cos nx + \frac{1}{n^2}\int \cos x\sin nx\, dx. \end{aligned}$$

Quindi per ogni $n \geq 2$ si ha

$$\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)\int \cos x\sin nx\, dx = \sin x\sin nx + \frac{1}{n}\cos x\cos nx + c, \qquad c \in \mathbb{R}$$

da cui segue che per ogni $n \geq 2$

$$\int \cos x\sin nx\, dx = \frac{n^2}{n^2-1}\left(\sin x\sin nx + \frac{1}{n}\cos x\cos nx\right) + c, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

Sostituendo in (1.2) si ottiene che per ogni $n \geq 2$

$$\begin{aligned} \int x\cos x\sin nx\, dx &= x\frac{n^2}{n^2-1}\left(\sin x\sin nx + \frac{1}{n}\cos x\cos nx\right) + \\ &\quad - \frac{n^2}{n^2-1}\underbrace{\left(\int \sin x\sin nx\, dx + \frac{1}{n}\int \cos x\cos nx\, dx\right)}_{(\otimes)}. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Calcoliamo ($\bigotimes$). Integrando per parti si ha che

$$\int \sin x \sin nx\, dx = -\cos x \sin nx + \frac{1}{n} \int \cos x \cos nx\, dx. \tag{1.4}$$

Pertanto non resta che calcolare quest'ultimo integrale. Intregrando per parti e utilizzando (1.4) si ha che

$$\begin{aligned}\int \cos x \cos nx\, dx &\overset{p.p.}{=} \sin x \cos nx + \frac{1}{n} \int \sin x \sin nx\, dx \\ &\overset{(1.4)}{=} \sin x \cos nx + \frac{1}{n}\left(-\cos x \sin nx + \frac{1}{n} \int \cos x \cos nx\, dx \right) \\ &= \sin x \cos nx - \frac{1}{n} \cos x \sin nx + \frac{1}{n^2} \int \cos x \cos nx\, dx.\end{aligned}$$

Quindi per ogni $n \geq 2$ si ha

$$\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \int \cos x \cos nx\, dx = \sin x \cos nx - \frac{1}{n} \cos x \sin nx + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

da cui segue che per ogni $n \geq 2$

$$\int \cos x \cos nx\, dx = \frac{n^2}{n^2-1} \left(\sin x \cos nx - \frac{1}{n} \cos x \sin nx \right) + c, \quad c \in \mathbb{R}. \tag{1.5}$$

Sostituendo (1.5) e (1.4) in ($\bigotimes$) si ottiene

$$\int \sin x \sin nx\, dx + \frac{1}{n} \int \cos x \cos nx\, dx = -\cos x \sin nx + \frac{2}{n} \int \cos x \cos nx\, dx =$$

$$= -\cos x \sin nx + \frac{2n}{n^2-1} \left(\sin x \cos nx - \frac{1}{n} \cos x \sin nx \right) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Sostituendo in (1.3) si ottiene

$$\int x \cos x \sin nx\, dx = x \frac{n^2}{n^2-1} \left(\sin x \sin nx + \frac{1}{n} \cos x \cos nx \right) +$$

$$+ \frac{n^2}{n^2-1} \cos x \sin nx - \frac{2n^3}{(n^2-1)^2} \left(\sin x \cos nx - \frac{1}{n} \cos x \sin nx \right) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Sostituendo in (1.1) si ottiene che per ogni $n \geq 2$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x \cos x \sin nx\, dx = \frac{2}{\pi} \left[x \frac{n^2}{n^2-1} \left(\sin x \sin nx + \frac{1}{n} \cos x \cos nx \right) + \right.$$

$$\left. + \frac{n^2}{n^2-1} \cos x \sin nx - \frac{2n^3}{(n^2-1)^2} \left(\sin x \cos nx - \frac{1}{n} \cos x \sin nx \right) \right]_0^\pi =$$

$$= -(-1)^n \frac{2n}{n^2-1}.$$

Infine per $n = 1$ si ha che

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\cos x\sin x\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi x\sin 2x\,dx \\ &\overset{p.p.}{=} \frac{1}{\pi}\left(\left[-\frac{1}{2}x\cos 2x\right]_0^\pi + \frac{1}{2}\int_0^\pi \cos 2x\,dx\right) \\ &= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2\pi}\left[-\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^\pi = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Quindi la serie di Fourier di f è

$$-\frac{1}{2}\sin x - 2\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{n^2-1}\,\sin nx.$$

f) La funzione f è periodica di periodo 2π. Inoltre f è continua in $\mathbb{R}$ esclusi i punti $x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$, per ogni $k \in \mathbb{Z}$, in cui ha una discontinuità di tipo salto.

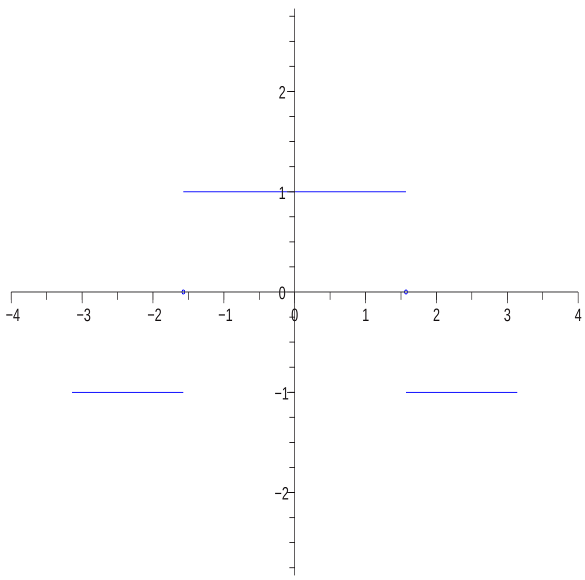

Fig. 10: Grafico di g.

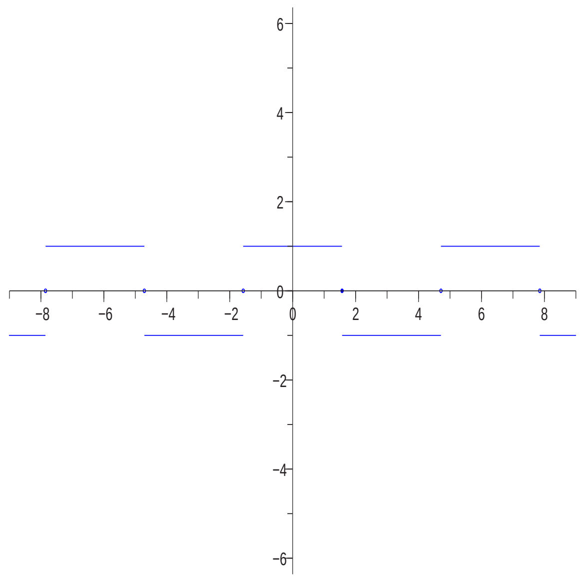

Fig. 11: Grafico di f.

Studiamo inizialmente la convergenza della serie di Fourier di f.

Osserviamo che $f_{|[-\pi,\pi]} \in L^2(-\pi, \pi)$, ossia che $\int_{-\pi}^{\pi} [f(x)]^2 \, dx < +\infty$. Infatti,

$$\int_{-\pi}^{\pi} [f(x)]^2 \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \, dx = 2\pi.$$

Ne segue che la serie di Fourier di f converge quadraticamente a f su $\mathbb{R}$.

Studiamo ora la convergenza puntuale della serie di Fourier di f. Essendo f continua in $\mathbb{R}$ esclusi i punti $x_k = (2k+1)\frac{\pi}{2}$, per ogni $k \in \mathbb{Z}$, si ha che la serie di Fourier di f converge a f in ogni $x \neq x_k$.

Consideriamo ora $x_k = (2k+1)\frac{\pi}{2}$, per ogni $k \in \mathbb{Z}$. Si ha che

$$f(x_k^-) = \lim_{x \to x_k^-} f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } k = 2m, \\ -1 & \text{se } k = 2m+1, \end{cases} \qquad m \in \mathbb{Z},$$

$$f(x_k^+) = \lim_{x \to x_k^+} f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } k = 2m, \\ 1 & \text{se } k = 2m+1, \end{cases} \qquad m \in \mathbb{Z},$$

$$f'(x_k^-) = \lim_{x \to x_k^-} \frac{f(x) - f(x_k^-)}{x - x_k} = 0, \qquad f'(x_k^+) = \lim_{x \to x_k^+} \frac{f(x) - f(x_k^+)}{x - x_k} = 0.$$

Quindi la serie di Fourier di f converge in $x_k = (2k+1)\frac{\pi}{2}$, per ogni $k \in \mathbb{Z}$, a $\frac{1}{2}[f(x_k^-) + f(x_k^+)] = 0$. Pertanto la serie di Fourier di f converge puntualmente a f su $\mathbb{R}$. Inoltre, essendo f di classe C^1 in ogni intervallo $](2k+1)\frac{\pi}{2}, (2k+3)\frac{\pi}{2}[$, per ogni $k \in \mathbb{Z}$, la serie di Fourier di f converge uniformemente a f su $[a, b]$, con $(2k+1)\frac{\pi}{2} < a < b < (2k+3)\frac{\pi}{2}$, per ogni $k \in \mathbb{Z}$. Poichè f non è continua su $[(2k+1)\frac{\pi}{2}, (2k+3)\frac{\pi}{2}]$, la convergenza non è uniforme su questi intervalli.

Determiniamo ora la serie di Fourier di f. Essendo f periodica di periodo 2π e pari, la serie di Fourier di f è della forma

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx,$$

dove

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} dx \right) = 0$$

e per ogni $n \geq 1$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx\,dx = \frac{2}{\pi} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos nx\,dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos nx\,dx \right) =$$

$$= \frac{2}{\pi} \left(\left[\frac{1}{n} \sin nx \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \left[\frac{1}{n} \sin nx \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \right) =$$

$$= \frac{4}{n\pi} \sin \frac{n}{2}\pi = \begin{cases} 0 & \text{se } n = 2m, \\ \frac{4(-1)^m}{(2m+1)\pi} & \text{se } n = 2m+1, \end{cases} \quad m \in \mathbb{N}.$$

Quindi la serie di Fourier di f è

$$\frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \cos(2n+1)x.$$

$g)$ La funzione f è periodica di periodo 2π. Inoltre f è continua su $\mathbb{R}$.

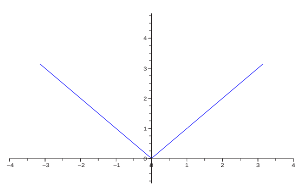

Fig. 12: Grafico di g.

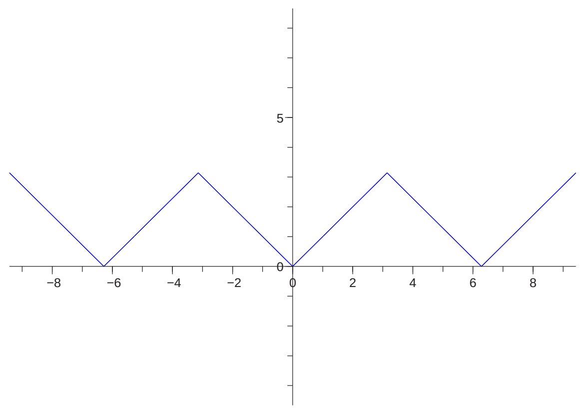

Fig. 13: Grafico di f.

Studiamo inizialmente la convergenza della serie di Fourier di f.

Osserviamo che $f_{|[-\pi,\pi]} \in L^2(-\pi,\pi)$, ossia che $\int_{-\pi}^{\pi} [f(x)]^2 \, dx < +\infty$. Infatti,

$$\int_{-\pi}^{\pi} [f(x)]^2 \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \, dx = \frac{2}{3}\pi^3.$$

Ne segue che la serie di Fourier di f converge quadraticamente a f su $\mathbb{R}$.

Studiamo ora la convergenza puntuale della serie di Fourier di f. Essendo f continua su $\mathbb{R}$ si ha che la serie di Fourier di f converge puntualmente a f su $\mathbb{R}$. Inoltre, essendo f di classe C^1 a tratti in $[-\pi,\pi]$, la serie di Fourier di f converge uniformemente a f su $\mathbb{R}$.

Determiniamo ora la serie di Fourier di f. Essendo f periodica di periodo 2π e pari, la serie di Fourier di f è della forma

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx,$$

dove

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x \, dx = \frac{\pi}{2}$$

e per ogni $n \geq 1$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx \, dx =$$

integrando per parti

$$= \frac{2}{\pi}\left(\left[\frac{1}{n}x\sin nx\right]_0^\pi - \frac{1}{n}\int_0^\pi \sin nx\,dx\right) =$$

$$= -\frac{2}{n\pi}\left[-\frac{1}{n}\cos nx\right]_0^\pi = \frac{2}{n^2\pi}\left[\cos n\pi - 1\right] =$$

$$= \frac{2}{n^2\pi}\left[(-1)^n - 1\right] = \begin{cases} 0 & \text{se } n = 2m, \\ \frac{4}{(2m+1)^2\pi} & \text{se } n = 2m+1, \end{cases} \quad m \in \mathbb{N}.$$

Quindi la serie di Fourier di f è

$$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}\cos(2n+1)x.$$

h) La funzione f è periodica di periodo 2π. Inoltre f è continua in $\mathbb{R}$ esclusi i punti $x = k\pi$, per ogni $k \in \mathbb{Z}$, in cui ha una discontinuità di tipo salto.

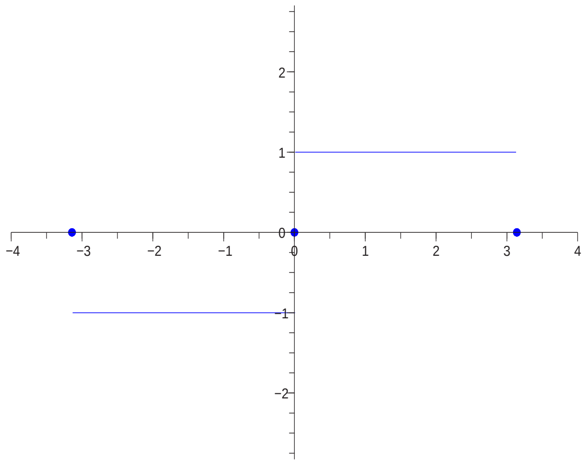

Fig. 14: Grafico di g.

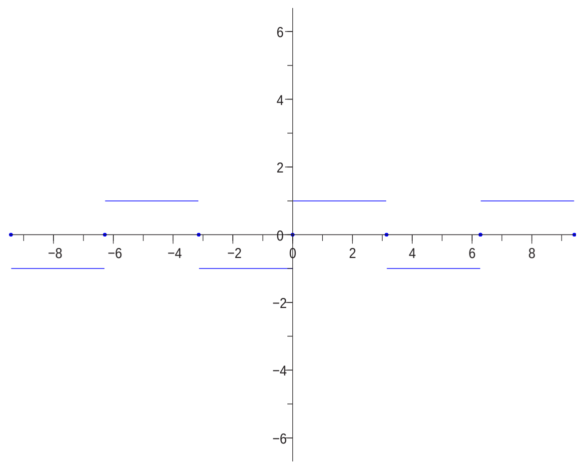

Fig. 15: Grafico di f.

Studiamo inizialmente la convergenza della serie di Fourier di f.

Osserviamo che $f_{|[-\pi,\pi]} \in L^2(-\pi,\pi)$, ossia che $\int_{-\pi}^{\pi} [f(x)]^2\,dx < +\infty$. Infatti,

$$\int_{-\pi}^{\pi} [f(x)]^2\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} dx = 2\pi.$$

Ne segue che la serie di Fourier di f converge quadraticamente a f su $\mathbb{R}$.

Studiamo ora la convergenza puntuale della serie di Fourier di f. Essendo f continua in $\mathbb{R}$ esclusi i punti $x_k = k\pi$, per ogni $k \in \mathbb{Z}$, si ha che la serie di Fourier di f converge a f in ogni $x \neq x_k$.

Consideriamo ora $x_k = k\pi$, per ogni $k \in \mathbb{Z}$. Si ha che

$$f(x_k^-) = \lim_{x \to x_k^-} f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } k = 2m, \\ 1 & \text{se } k = 2m+1, \end{cases} \qquad m \in \mathbb{Z},$$

$$f(x_k^+) = \lim_{x \to x_k^+} f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } k = 2m, \\ -1 & \text{se } k = 2m+1, \end{cases} \qquad m \in \mathbb{Z},$$

$$f'(x_k^-) = \lim_{x \to x_k^-} \frac{f(x) - f(x_k^-)}{x - x_k} = 0, \qquad f'(x_k^+) = \lim_{x \to x_k^+} \frac{f(x) - f(x_k^+)}{x - x_k} = 0.$$

Quindi la serie di Fourier di f converge in $x_k = k\pi$, per ogni $k \in \mathbb{Z}$, a $\frac{1}{2}[f(x_k^-) + f(x_k^+)] = 0$. Pertanto la serie di Fourier di f converge puntualmente a f su $\mathbb{R}$. Inoltre, essendo f di classe C^1 in ogni intervallo $]k\pi, (k+1)\pi[$, per ogni $k \in \mathbb{Z}$, la serie di Fourier di f converge uniformemente a f su $[a,b]$, con $k\pi < a < b < (k+1)\pi$, per ogni $k \in \mathbb{Z}$. Poichè f non è continua su $[k\pi, (k+1)\pi]$, la convergenza non è uniforme su questi intervalli.

Determiniamo ora la serie di Fourier di f. Essendo f periodica di periodo 2π e dispari, la serie di Fourier di f è della forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx,$$

dove per ogni $n \geq 1$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\, dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin nx\, dx =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[-\frac{1}{n}\cos nx\right]_0^{\pi} = \frac{2}{n\pi}\left[1-\cos n\pi\right] =$$

$$= \frac{2}{n\pi}\left[1-(-1)^n\right] = \begin{cases} 0 & \text{se } n = 2m, \\ \frac{4}{(2m+1)\pi} & \text{se } n = 2m+1, \end{cases} \qquad m \in \mathbb{N}.$$

Quindi la serie di Fourier di f è

$$\frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1}\sin(2n+1)x.$$