AM210 2011-2012: RECUPERO I ESONERO

ESERCIZIO 0. Sia $f(x,y) = \frac{\sin(x^2y)}{x^2+y^2}$ se $x^2+y^2 > 0$, $f(0,0)=0$.

Stabilire se f é, in $(0,0)$, continua, dotata di derivate direzionali, differenziabile.

TEMA 1

Sia $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$. Dare la definizione di differenziabilitá, e di gradiente, per f in $u \in \mathbf{R}^n$ e dire che cosa significa che $f \in C^1(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$. Provare poi che

$$f \in C^1(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}) \quad \Leftrightarrow \quad f \text{ é differenziabile in ogni punto} \quad \text{e} \quad \nabla f \in C(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n).$$

ESERCIZIO 1. Sia $f \in C^1(\mathbf{R}^n)$ tale che

$$< \nabla f(x) - \nabla f(y), x-y > \geq \|x-y\|^2 \qquad \forall x, y \in \mathbf{R}^n$$

Provare che

$$f(x) \geq f(0) - \|\nabla f(0)\| \, \|x\| + \frac{1}{2}\|x\|^2 \qquad \forall x \in \mathbf{R}^n$$

Concludere che, per ogni $h \in \mathbf{R}^n$, $f_h(x) := f(x) - h$ ha esattamente un punto critico e che quindi $x \to \nabla f(x)$ é una biiezione di $\mathbf{R}^n$ in se, e quindi esiste la funzione inversa $(\nabla f)^{-1} : y \to (\nabla f)^{-1}(y)$. Si puó dire che $(\nabla f)^{-1}$ é continua?

TEMA 2 . Enunciare e dimostrare il Lemma di Schwartz.

ESERCIZIO 2. Sia $\varphi = (\varphi_1(u,v), \varphi_2(u,v))$ in $C^2(\mathbf{R}^2, \mathbf{R}^2)$ e tale che

$$\varphi_{1,u} = \varphi_{2,v}, \qquad \varphi_{1,v} = -\varphi_{2,u}$$

Provare che

(i) $\Delta\varphi_1 = \Delta\varphi_2 \equiv 0$ e $\det J_\varphi = |\nabla\varphi_1(u,v)|^2 = |\nabla\varphi_2(u,v)|^2 \qquad \forall (u,v) \in \mathbf{R}^2$

Sia $U \in C^1(\mathbf{R}^2, \mathbf{R})$. Provare che

(ii) $|\nabla U(\varphi(u,v))|^2 = |\nabla U|^2(\varphi(u,v)) \det J_\varphi(u,v) \quad \forall (u,v) \in \mathbf{R}^2$.

TEMA/ESERCIZIO 3 Dimostrare, usando Cauchy-Schwartz, le diseguaglianze

$$(i) \qquad \int_0^{+\infty} \left[\frac{1}{x} \int_0^x f(t)dt \right]^2 \leq 4 \int_0^{+\infty} f^2 \qquad \qquad \forall f \in C_0([0, +\infty))$$

$$(ii) \qquad \int_0^{+\infty} \frac{f^2(x)}{x^2} dx \leq 4 \int_0^{+\infty} |f'(x)|^2 dx \qquad \forall f \in C^1([0, \infty)) \quad \text{con} \quad f(0) = 0$$

TEMA 4 (Formula di Taylor) Sia $f \in C^2(B_r(u)), u \in \mathbf{R}^n$. Provare che:

$$f(u+h) \ = \ f(u) + \ < \nabla f(u) \ , \ h > \ + \frac{1}{2} < H_f(u) \, h, \ h > \ + \ \circ \, (||h||^2)$$

TEMA 5 . Sia $u \in \mathbf{R}^n$, $f \in C^2(B_r(u))$. Provare che

$\nabla f(u) = 0, \quad < H_f(u) \, h, h > \ < 0 \quad \forall h \in \mathbf{R}^n, \ h \neq 0, \quad \Rightarrow \quad u$ é massimo locale.

Mostrare con un esempio che in un punto di massimo locale puó accadere che $< H_f(u) \, h, h > \ = 0$ per qualche $h \in \mathbf{R}^n, \ h \neq 0$.

ESERCIZIO 4.

Sia $f(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}(x^2 + y^2 - 2xy) \qquad (x, y) \in \mathbf{R}^2$.

Determinare i punti stazionari di f e, se esistono, massimo e minimo valore di f

ESERCIZIO 5.

Sia $\mathcal{A}$ matrice $n \times n$ definita positiva. Sia

$$m := \inf\{< \mathcal{A}x, x >: \quad \|x\|^2 = 1\}$$

Provare che m é il piú piccolo autovalore di $\mathcal{A}$.