AM2 2011-2012: APPELLO A

TEMA 1 Sia $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$. Dare la definizione di differenziabilitá, e di gradiente, per f in $u \in \mathbf{R}^n$ e dire che cosa significa che $f \in C^1(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$. Provare poi che

$$f \in C^1(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}) \quad \Leftrightarrow \quad f \quad \text{é differenziabile in ogni punto} \quad \text{e} \quad \nabla f \in C(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n).$$

ESERCIZIO 1. Sia $f \in C^1(\mathbf{R}^n)$ tale che

$$< \nabla f(x) - \nabla f(y), x - y > \geq \|x - y\|^2 \qquad \forall x, y \in \mathbf{R}^n$$

Provare che

$$f(x) \geq f(0) - \|\nabla f(0)\| \, \|x\| + \frac{1}{2}\|x\|^2 \qquad \forall x \in \mathbf{R}^n$$

Concludere che, per ogni $h \in \mathbf{R}^n$, $\quad f_h(x) := f(x) - h \quad$ ha esattamente un punto critico e che quindi $x \to \nabla f(x)$ é una biiezione di $\mathbf{R}^n$ in se, e quindi esiste la funzione inversa $\quad (\nabla f)^{-1} : y \to (\nabla f)^{-1}(y)$. Si puó dire che $(\nabla f)^{-1}$ é continua?

ESERCIZIO 2. Sia $\varphi = (\varphi_1(u, v), \varphi_2(u, v))$ in $C^2(\mathbf{R}^2, \mathbf{R}^2)$ e tale che

$$\varphi_{1,u} = \varphi_{2,v}, \qquad \varphi_{1,v} = -\varphi_{2,u}$$

Sia inoltre $U \in C^1(\mathbf{R}^2, \mathbf{R})$. Provare che

(i) $\Delta\varphi_1 = \Delta\varphi_2 \equiv 0 \quad$ e $\quad \det J_\varphi = |\nabla\varphi_1(u, v)|^2 = |\nabla\varphi_2(u, v)|^2 \qquad \forall (u, v) \in \mathbf{R}^2$

(ii) $|\nabla(U \circ \varphi)(u, v)|^2 = |\nabla U|^2(\varphi(u, v)) \det J_\varphi(u, v) \quad \forall (u, v) \in \mathbf{R}^2$.

TEMA 2 . Provare la formula (di Stirling)

$$\Gamma(s + 1) \; = \; s^{s+\frac{1}{2}} \, e^{-s} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} \, dt \; + \; \circ(1) \right], \qquad \circ(1) \to_{s \to +\infty} 0$$

TEMA 3 . Sia $f \in C_{2\pi}$. Provare che la serie di Fourier di f converge a f in tutti i punti $\tau \in [-\pi, \pi]$ tali che

$$\exists \delta = \delta(\tau) : \qquad \sup_{|t| \leq \delta} \left| \frac{f(t + \tau) - f(\tau)}{t} \right| < \infty$$

ovvero $\qquad f(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}_n e^{in\tau} \qquad$ in tutti i punti τ attorno ai quali il rapporto incrementale rimane limitato.

ESERCIZIO 3.

(i) Provare, usando le formule di Eulero (e la serie geometrica in $\mathbf{C}$), che

$$\sum_{k=0}^{\infty} r^k \cos kt = \frac{1 - r\cos t}{1 - 2r\cos t + r^2} \qquad \forall r \in [0,1), \quad \forall t \in \mathbf{R}$$

(ii) Calcolare, integrando per parti ed usando (i), i coefficenti di Fourier di $f(r,t) := \arctan[\frac{r\sin t}{1-r\cos t}]$.

Scrivere, motivando, lo sviluppo di Fourier di $t \to f(r,t)$ per ogni $r \in [0,1)$.

TEMA 4. Enunciare e dimostrare il Principio delle Contrazioni ed indicarne una applicazione.

TEMA 5. Sia $F \in C^1(\mathbf{R}^n)$.

Enunciare e dimostrare un teorema di esistenza globale per il sistema differenziale

$$\dot{x} = F(x)$$

ESERCIZIO 4. Scrivere l'equazione (del secondo ordine)

$$u''(t) + \sin u(t) = 0$$

come sistema di due equazioni differenziali del primo ordine e riconoscerne il carattere Hamiltoniano.
Derivare quindi esistenza ed unicitá della soluzione del problema (di Cauchy)

$$u''(t) + \sin u(t) = 0, \quad u(0) = a, \quad u'(0) = b, \qquad (a,b) \in \mathbf{R}^2$$

e disegnare la traiettoria $(u(t), u'(t))$ al variare di $(a,b) \in \mathbf{R}^2$.
Discutere infine la prolungabilitá per tutti i tempi della soluzione del problema di Cauchy al variare di $(a,b) \in \mathbf{R}^2$.
Stabilire infine se per qualche dato iniziale (a,b) la soluzione é periodica.

ESERCIZIO 5. Determinare l'integrale generale di

$$y'''' + y''' - 8y' - 8y = \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x$$