AM210: Tracce delle lezioni- X Settimana

EQUAZIONI DIFFERENZIALI ORDINARIE

Equazioni differenziali lineari del I ordine

Date le funzioni $a(x), b(x)$ continue in (a, b) determinare, se esistono, le funzioni $y = y(x)$ di classe $C^1((a, b))$ tali che

$$y'(x) + a(x)y(x) = b(x) \qquad \forall x \in (a, b) \qquad \textbf{(ED)}$$

(ED) si chiama equazione differenziale nella funzione incognita $y = y(x)$.
Tale equazione é **lineare** perché l'operatore

$$\mathcal{D} : C^1((a, b)) \to C((a, b)), \qquad (\mathcal{D}y)(x) := y'(x) + a(x)y(x)$$

é **lineare**, cioé $\mathcal{D}(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = \alpha_1 \mathcal{D}y_1 + \alpha_2 \mathcal{D}y_2$. Si dice **del primo ordine** perché nell'equazione compare solo la *derivata prima.*
Tale equazione, se ha soluzione, ne ha infinite . Fissato peró $x_0 \in (a, b)$ (**'punto iniziale'**) e y_0 (**'valore iniziale'**), il problema

$$y'(x) + a(x)y(x) = b(x) \qquad \forall x \in (a, b), \qquad y(x_0) = y_0 \qquad \textbf{(PC)}$$

consistente nel trovare una soluzione di (ED) soddisfacente la **condizione iniziale, o di Cauchy** $y(x_0) = y_0$ ha, come vedremo, una sola soluzione. Tale problema viene chiamato **problema di Cauchy** associato ad (ED).

ESEMPIO. Se $a \equiv 0$ le soluzioni dell'equazione differenziale $y' = b$ sono le primitive di b. Siccome b **é supposta continua**, le soluzioni di questa equazione sono date, per il Teorema Fondamentale del Calcolo (TFC), da

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} b(t)dt$$

ove $x_0 \in (a, b)$ é un punto fissato e y_0 é una costante arbitraria ; si tratta in effetti di una famiglia a un parametro di soluzioni, giacché, se si cambia il 'punto iniziale' x_0 la famiglia di funzioni non cambia.
Tale formula dice che, fissato il 'punto iniziale' x_0, c'é una unica soluzione dell'equazione differenziale data che prende in x_0 il valore y_0, cioé

il Problema di Cauchy (PC) ha una ed una sola soluzione.

Notiamo che condizione necessaria perché $b(x)$ ammetta primitiva é che b abbia la proprietá del valore intermedio (Teorema di Darboux). In particolare, **la continuitá di $b(x)$ é essenziale** .

Soluzione del Problema di Cauchy associato a (ED).

Se y é soluzione di (PC), moltiplicando (ED) per $e^{\int_{x_0}^{x} a(t)dt}$, troviamo che

$$\left(y(x)e^{\int_{x_0}^{x} a(t)dt}\right)' = [y'(x) + a(x)y(x)]e^{\int_{x_0}^{x} a(t)dt} = e^{\int_{x_0}^{x} a(t)dt}b(x)$$

e quindi, per il TFC, $\quad y(x)e^{\int_{x_0}^{x} a(t)dt} = y(x_0) + \int\limits_{x_0}^{x} e^{\int_{x_0}^{t} a(s)ds}b(t)dt \quad$ e quindi

$$y(x) = e^{-\int\limits_{x_0}^{x} a(t)dt}\left[y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} e^{\int_{x_0}^{t} a(s)ds}b(t)dt\right]$$

Tale espressione, che fornisce al variare del parametro y_0 tutte le soluzioni di (ED), si chiama **Integrale generale** di (ED).

Equazioni differenziali autonome del I ordine:
esistenza, unicitá, tempo di esistenza.

Sia $f \in C((a,b))$. Trovare $x \in C^1(I)$, I intervallo opportuno, tale che

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) \qquad \forall t \in I \qquad \textbf{(EDA)}$$

Tale equazione differenziale del primo ordine si chiama **autonoma** in quanto la variabile indipendente (qui indicata come t) non compare esplicitamente nell'equazione. Una particolare conseguenza di questo fatto é che

se $x(t), t \in (\alpha,\beta)$ é soluzione, allora anche $x(t-t_0), t \in (\alpha+t_0, \beta+t_0)$ é soluzione.

Per questa ragione la condizione di Cauchy si scrive usualmente nella forma $x(0) = x_0$ ed il Problema di Cauchy

$$x'(t) = f(x(t)), \qquad x(0) = x_0 \qquad \textbf{(PC)}$$

ha la seguente interpretazione 'dinamica': la soluzione $x(t)$ di (PC) indica la posizione di un punto mobile (su $\mathbf{R}$) che si muove con velocitá data all'istante t da $f(x(t))$ (la velocitá dipende cioé dalla posizione al tempo t) e che si trovi al tempo 'iniziale' $t = 0$ nella posizione x_0 .

1. Equilibri.

Se $f(x_0)=0$, una soluzione é banalmente data dalla funzione costante $x(t)=x_0$ per ogni t . Siccome il 'punto mobile' $x(t)$ non si muove, la posizione x_0 si dice appunto di **equilibrio**.

2. Esistenza e unicitá locale se $f(x_0)\neq 0$.

Determinazione di una soluzione di (PC). Possiamo supporre $f(x_0)>0$. Sia (a,b) il piú grande intervallo contenente x_0 su cui risulta $f(x)>0$. É allora definita in (a,b) la funzione

$$F(x):=\int_{x_0}^{x}\frac{ds}{f(s)},\quad x\in(a,b)$$

Ovviamente, $F'(x)=\frac{1}{f(x)},\quad x\in(a,b)$. Ora, se $x(t)$ é soluzione di (PC), allora $\frac{d}{dt}F(x(t))=\frac{\dot{x}(t)}{f(x(t))}\equiv 1$ e quindi, integrando tra 0 e t,

$$F(x(t))=t \quad \text{ovvero} \quad x(t)=F^{-1}(t),\quad t\in(F(a),F(b))$$

Siccome

$$\frac{d}{dt}F^{-1}(t)=\frac{1}{F'(F^{-1}(t))}=f(F^{-1}(t))\quad \forall t\in(F(a),F(b)) \quad \text{e} \quad F^{-1}(0)=x_0$$

(PC) ha una e una sola soluzione in $(F(a),F(b))$**:** $x(t)=F^{-1}(t)$.

3. Tempi di esistenza.

Sia Sia (a,b) il piú grande intervallo contenente x_0 su cui risulta $f(x)>0$, $F(x):=\int_{x_0}^{x}\frac{ds}{f(s)}$, $x\in(a,b)$. Il problema di Cauchy

$$x'=f(x),\quad x(0)=x_0$$

ha una ed una sola soluzione data da

$$x(t)=F^{-1}(t),\quad t\in\left(-\int_a^{x_0}\frac{ds}{f(s)},\int_{x_0}^{b}\frac{ds}{f(s)}\right)$$

Se $\int_a^{x_0}\frac{ds}{f(s)}=\int_{x_0}^{b}\frac{ds}{f(s)}=+\infty$, **la soluzione é definita per tutti i tempi**. In tal caso si dice che la soluzione **esiste globalmente**.
Se invece $\int_{x_0}^{b}\frac{ds}{f(s)}<+\infty$ (e $b=+\infty$) e quindi la soluzione non é definita per tutti i tempi si dice che la soluzione **esplode in tempo finito** (nel futuro; ci sará

esplosione in tempo finito nel passato se $\int_{x_0}^{a} \frac{ds}{f(s)} > -\infty$ (e $a = -\infty$).
Ad esempio per le seguenti equazioni differenziali

$$(i)\, x' = e^x, \qquad (ii)\, x' = e^{-x}, \qquad (iii)\, x' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \quad (iv) \dot{x} = \cosh^2 x$$

soggette alla condizione iniziale $x(0) = 0$ si ha

(i) $F(x) = 1 - e^{-x}$ e quindi la soluzione $x(t) = -\log(1-t)$ é definita in $(-\infty, 1)$

(ii) $F(x) = e^x - 1$ e quindi la soluzione $x(t) = \log(t+1)$ é definita in $(-1, +\infty)$

(iii) $F(x) = \int_0^x \sqrt{1+s^2} ds$ e quindi la soluzione é definita per tutti i tempi (infatti $x(t) = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{1+x^2} + \log(x + \sqrt{1+x^2}\right))$.

(iv) $F(x) = \int\limits_{x_0}^{x} \frac{ds}{\cosh^2 s} = \tanh x - \tanh x_0$ e quindi la soluzione é definita in $(-1 - \tanh x_0, 1 - \tanh x_0)$. Questo mostra in particolare che l'intervallo di esistenza dipende dal valore iniziale x_0.

Sia $f \in C^1(\mathbf{R})$. Se $a < b$ sono due zeri consecutivi di f e $x_0 \in (a, b)$ allora la soluzione di $x' = f(x), \quad x(0) = x_0$ é definita per tutti i tempi perché gli integrali $\int_{x_0}^{a} \frac{ds}{f(s)}$ e $\int_{x_0}^{b} \frac{ds}{f(s)}$ divergono entrambi. Ad esempio, nei seguenti problemi

$$(i) \quad x' = \frac{1}{2}(1-x^2), \quad x(0) = 0, \qquad (ii) \quad x' = \frac{1}{2}(1-x^2), \quad x(0) = 2$$

(i) $F(x) = \int\limits_0^x \frac{2ds}{1-s^2} = \int\limits_0^x \left[\frac{1}{1+s} + \frac{1}{1-s}\right] ds = \log \frac{1+x}{1-x}$ e quindi la soluzione $x(t) = \frac{e^t - 1}{e^t + 1}$ é definita su tutto $\mathbf{R}$

(ii) $F(x) = \frac{1}{2} \int\limits_2^x \frac{ds}{1-s^2} = \log \frac{1}{3} \frac{x+1}{x-1}$ e quindi la soluzione $x(t) = \frac{3e^t + 1}{3e^t - 1}$ é definita (e decrescente) in $(-\log 3, +\infty)$.

3. Non unicitá per tempi grandi. Mostriamo con degli esempi che, pur in presenza di una unica soluzione locale (cioé 'per tempi piccoli') l'unicitá puó venire a mancare globalmente (cioé 'per tempi grandi').

(i) Consideriamo il problema $\qquad \dot{x} = x^{\frac{2}{3}}, \qquad x(0) = -1.$

Qui, con le notazioni usate al punto 1, $\quad f(x) = x^{\frac{2}{3}}$,

$$F(x) = \int_{-1}^{x} \frac{ds}{s^{\frac{2}{3}}} = 3x^{\frac{1}{3}} + 3, \quad x \in (-\infty, 0), F(-\infty) = -\infty, F(0) = 3$$

Il problema dato ha ha come *unica soluzione in* $(-\infty, 3)$ la funzione

$$x(t) := F^{-1}(t) = (\frac{t-3}{3})^3, \qquad (-\infty, 3)$$

Tale soluzione puó peró essere prolungata su tutto $\mathbf{R}$ cosi:

$$\forall t_0 \geq 3 : \qquad x(t, t_0) := (\frac{t-3}{3})^3 \chi_{(-\infty,3)} + (\frac{t-t_0}{3})^3 \chi_{[t_0,+\infty)}$$

Con verifica diretta: queste sono tutte soluzioni del problema di Cauchy dato.

(ii) Troviamo tutte le soluzioni di $\qquad \dot{x} = \sqrt{|1-x^2|}, \quad x(0) = 0.$

Sia, per $x \in (-1, 1)$, $\quad F(x) := \int\limits_0^x \frac{ds}{\sqrt{1-s^2}} = \arcsin x$. Dunque $x = \sin t$ é soluzione in $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Per $x > 1$ é $\quad F(x) := \int\limits_0^x \frac{ds}{\sqrt{|1-s^2|}} = \frac{\pi}{2} + \int\limits_1^x \frac{ds}{\sqrt{s^2-1}} = \frac{\pi}{2} + \cosh^{-1} x$ e quindi $x(t) = F^{-1}(t) = \cosh(t - \frac{\pi}{2})$ per $t \geq \frac{\pi}{2}$.

Infine, per $\quad t \leq 0, \qquad (-x(-t))' = x'(-t) = \sqrt{|1 - [(-x)(-t)]^2|} \qquad$ e quindi $x(t) = \sin t$ in $(-\frac{\pi}{2}, 0)$ e $x(t) = -\cosh(t + \frac{\pi}{2})$ se $t \leq -\frac{\pi}{2}$.

Ma, come si verifica derivando, per ogni $t^+ \geq \frac{\pi}{2}$ la funzione

$$x(t) = \chi_{[0,\frac{\pi}{2}]} \sin t + \chi_{[\frac{\pi}{2},t^+]} + \chi_{[t^+,+\infty)} \cosh(t - t^+)$$

é soluzione in $[0, +\infty)$ e $-x(-t)$ lo é in $(-\infty, 0]$.

(iii) Il problema $\quad \dot{x} = \sqrt{|x|}, \qquad x(0) = x_0 > 0.$

Sia $x(t)$ soluzione; $\dot{x}(t) \geq 0$ e quindi $x(t)$ é non decrescente.

Da $\quad \left(2\sqrt{x(t)}\right)' = 1, \quad$ segue, integrando, $\sqrt{x(t)} = \sqrt{x_0} + \frac{t}{2} \quad$ se $t \geq -2\sqrt{x_0}$, e quindi $\quad x(t) = \left(\sqrt{x_0} + \frac{t}{2}\right)^2$ se $t \geq -2\sqrt{x_0}$, cioé tale funzione é *l'unica soluzione del problema di Cauchy dato nell'intervallo di tempo* $(-2\sqrt{x_0}, +\infty)$.

Una verifica mostra che $\quad x(t) = -\left(\sqrt{x_0} + \frac{t}{2}\right)^2$ é soluzione in $t \leq -2\sqrt{x_0}$. Dalla derivabilitá di

$$x(t) := \left(\sqrt{x_0} + \frac{t}{2}\right)^2 \chi_{[-2\sqrt{x_0},+\infty)} - \left(\sqrt{x_0} + \frac{t}{2}\right)^2 \chi_{(-\infty,-2\sqrt{x_0}]}$$

segue che tale funzione é soluzione, definita su tutto $\mathbf{R}$. **Ma non é l'unica!** Infatti

$$x(t) := \left(\sqrt{x_0} + \frac{t}{2}\right)^2 \chi_{[-2\sqrt{x_0},+\infty)} - \left(\sqrt{\xi_0} + \frac{t}{2}\right)^2 \chi_{(-\infty,-2\sqrt{\xi_0}]}$$

é un'altra soluzione del medesimo problema di Cauchy quale che sia $\xi_0 \geq x_0$.

4. Unicitá/non unicitá locale. Sia x_0 un equilibrio. La soluzione costante,

$$x(t) = x_0 \quad \forall t, \qquad \textit{non é in generale l'unica soluzione:}$$

se x_0 é uno zero isolato di f e l'integrale $\int_{x_0}^{x} \frac{ds}{f(s)}$ esiste in senso generalizzato (e questo accade se $f(x) = O(|x - x_0|^{\delta})$ per un $\delta \in (0,1)$) allora la formula al punto 1 continua a fornire una soluzione (non costante) di (PC). Ed infatti ci sono infinite soluzioni di (PC). Vediamo esempi di (PC) con **infinite soluzioni:**

(k) $\quad \dot{x} = x^{\frac{2}{3}}, \quad x(0) = 0 \qquad$ (kk) $\dot{x} = \sqrt{|x|}, \quad x(0) = 0.\quad$ hanno soluzioni

$(k) \quad x(t) = \left(\frac{t-t^-}{3}\right)^3 \chi_{(-\infty,t^-]} + \left(\frac{t-t^+}{3}\right)^3 \chi_{[t^+,+\infty)}$ per ogni $\quad t^- \leq 0 \leq t^+$

$(kk) \quad x(t) = -\left(\frac{t-t^-}{2}\right)^2 \chi_{(-\infty,t^-]} + \left(\frac{t-t^+}{2}\right)^2 \chi_{[t^+,+\infty)}$ per ogni $\quad t^- \leq 0 \leq t^+.$

IL PROBLEMA DI CAUCHY

Sia $f \in C(O, \mathbf{R}^n)$, $x \in O \subset \mathbf{R}^n$ aperto. Trovare, se esistono, $\delta > 0$, e una funzione $\gamma \in C^1((-\delta, \delta), O)$ tali che

$$\dot{\gamma}(t) = f(\gamma(t)) \quad \forall t \in (-\delta, \delta), \qquad \gamma(0) = x \qquad (*)$$

NOMENCLATURA. L'equazione $\dot{\gamma}(t) = f(\gamma(t))$ é infatti un **sistema di n equazioni differenziali** nelle n (funzioni) incognite $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \ldots, \gamma_n(t))$:

$$\dot{\gamma}_i(t) = f_i(\gamma(t)) \quad \forall t \in (-\delta, \delta), \qquad \gamma_i(0) = x_i \qquad i = 1, \ldots, n \qquad (*)$$

La condizione $\gamma(0) = x$ si chiama **condizione iniziale**.

La funzione data f si chiama anche **campo di vettori** in O (i vettori $f(x)$ applicati nei punti $x \in O$). Una soluzione γ é una *curva tangente in ogni suo punto al campo di vettori* f e si chiama anche **curva integrale** del campo. Al variare della condizione iniziale x in O si otterrá una famiglia di curve $\gamma^x(t)$ che si chiamerá **flusso** generato dal campo f.

Dal punto di vista dinamico, f é un **campo di velocitá** e $\gamma(t)$ é, al variare di t, la **traiettoria** di un punto mobile la cui velocitá all'istante t é data da $f(\gamma(t))$ e che si trova nell'istante iniziale $t = 0$ nella posizione iniziale x.

Una formulazione equivalente: esistenza di un di punto fisso per un operatore integrale

Se $\gamma \in C^1(-\delta,\delta),O)$ é soluzione del Problema di Cauchy $(*)$, allora, per il TFC, $\gamma_i(t) = x + \int\limits_0^t f_i(\gamma(\tau))d\tau$, ovvero, con notazione vettoriale,

$$\gamma(t) = x + \int\limits_0^t f(\gamma(\tau))d\tau \qquad t \in (-\delta,\delta) \qquad\qquad (**)$$

ove, se $x \in C([a,b],\mathbf{R}^n)$, intendiamo che $\int\limits_a^b x(t)dt := (\int\limits_a^b x_1(t)dt,\ldots,\int\limits_a^b x_n(t)dt)$. Viceversa, se $\gamma \in C(-\delta,\delta),O)$ risolve *l'equazione integrale* $(**)$, allora , di nuovo per il TFC, $\gamma \in C^1(-\delta,\delta),O)$ e soddisfa $(*)$.
Vediamo ora come $(**)$ si riscriva come *equazione di punto fisso per un opportuno operatore integrale.* Sia $\overline{B}_{2r}(x_0) \subset O$, cosicché , se $x \in B_r(x_0)$, allora

$$\|\gamma(t) - x\| \le r \quad \forall t \in [-\delta,\delta] \quad \Rightarrow \quad \|\gamma(t) - x_0\| \le 2r \quad \forall t \in [-\delta,\delta]$$

Posto

$$M := \sup_{\xi \in \overline{B}_{2r}(x_0)} \|f(\xi)\|$$

eventualmente rimpicciolendo δ, possiamo supporre che $\delta M < r$ e quindi

$$\gamma([-\delta,\delta]) \subset \overline{B}_r(x) \Rightarrow x + \int\limits_0^t f(\gamma(\tau))d\tau \in \overline{B}_{2r}(x_0) \quad \forall t \in [-\delta,\delta]$$

Ció segue dalla diseguaglianza $\|\int\limits_a^b x(t)dt\|^2 = \int_a^b \left[\sum_{i=1}^n \left(\int\limits_a^b x_i(t)dt\right) x_i(t)\right] dt \le$

$$\int_a^b \left[\|x(t)\| \, \|\int\limits_a^b x(t)dt\|\right] dt = \|\int\limits_a^b x(t)dt\| \int_a^b \|x(t)\|dt \qquad \text{ovvero}$$

$$\|\int\limits_a^b x(t)dt\| \le \int_a^b \|x(t)\|dt$$

Con tale scelta di δ, la formula

$$(T\gamma)(t) := x + \int\limits_0^t f(\gamma(\tau))d\tau \qquad t \in [-\delta,\delta]$$

definisce un *operatore integrale* T che trasforma $\gamma \in C([-\delta,\delta],\overline{B}_r(x))$ in $T\gamma \in C([-\delta,\delta],\overline{B}_r(x))$ cioé T *manda lo spazio metrico completo* $C([-\delta,\delta],\overline{B}_r(x))$ *in se*: γ **soddisfa** $(**)$ **se e solo se** γ **é un punto fisso di** T.