AM210: Tracce delle lezioni- IX Settimana

SVILUPPI IN SERIE DI FOURIER

Polinomi e serie trigonometriche Dati $a_0, a_n, b_n \in \mathbf{R}$, possiamo loro associare il *polinomio trigonometrico*

$$P_N(t) := a_0 + \sum_{n=1}^{N} (a_n \cos nt + b_n \sin nt) \quad t \in \mathbf{R} \qquad (1)$$

che, posto $c_0 = a_0$, $c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n)$ se $n \geq 1$ e $c_{-n} = \overline{c_n} = a_n + ib_n$ si scrive anche

$$P_N(t) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{int} \qquad t \in \mathbf{R} \qquad (2)$$

Piú in generale, i c_n in (2) potranno essere arbitrari numeri complessi e P_N sará reale se e solo se $c_{-n} = \overline{c_n}$.
Se $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n| < \infty$, allora $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$ converge, uniformemente, per $|z| \leq 1$. In particolare é definita la funzione o *serie trigonometrica*

$$f(t) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int} \qquad \forall t \in \mathbf{R} \qquad (3)$$

In quanto limite uniforme, f é continua, ed inoltre f é 2π-periodica: $f \in C_{2\pi}(\mathbf{R}, \mathbf{C})$.
In generale, f é a valori complessi; f é a valori reali se e solo se $c_{-n} = \overline{c_n}$. Si ha:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i(k-n)t} \right) dt = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k-n)t} dt = c_n \quad \forall n \in \mathbf{Z}$$

perché, dato che la convergenza in (3) é uniforme, si puó integrare termine a termine; inoltre $\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)t} dt = 0$ se $n \neq m$, $\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)t} dt = 2\pi$ se $n = m$.
Dunque, la somma di una serie trigonometrica $f(t) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int}$ si puó scrivere

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt \right) e^{int}$$

Definizione (coefficenti di Fourier). Data $f \in C_{2\pi}(\mathbf{R}, \mathbf{C})$, restano definiti

$$\hat{f}_n := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt \qquad n \in \mathbf{Z} \qquad \textbf{(coefficenti di Fourier) di} \quad f$$

Definizione (serie di Fourier). Data $f \in C_{2\pi}(\mathbf{R}, \mathbf{C})$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}_n e^{int} \qquad \textbf{é serie di Fourier di} \quad f$$

NOTA: in generale tale serie non convergerá, neppure puntualmente!
NOTA: se $f \in C_{2\pi}(\mathbf{R})$, i suoi coefficenti di Fourier sono complessi coniugati, e quindi la serie di Fourier associata é reale:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}_n e^{int} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)\, dt + \frac{i}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)\, dt \right) (\cos nt - i \sin nt) =$$

$$\tfrac{1}{2\pi} \textstyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[(\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)\, dt) \cos nt + (\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)\, dt) \sin nt \right] +$$

$$\tfrac{i}{2\pi} \textstyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[(\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)\, dt)\ \sin nt - (\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)\, dt)\ \cos nt \right] =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt + \frac{1}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)\, dt \right) \cos nt \ + \ \left(\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)\, dt \right) \sin nt$$

La f si dice **sviluppabile in serie di Fourier** se la sua serie di Fourier converge e

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}_n e^{int} \qquad \forall \quad t \in \mathbf{R}$$

Teorema 1. $f \in C_{2\pi}$, $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{f}_n| < \infty \Rightarrow f$ *é somma (uniforme) della propria serie di Fourier.*

La ragione é che $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{f}_n| < \infty \quad \Rightarrow \quad g(t) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}_n e^{int}$ é in $C_{2\pi}$ ed ha gli stessi coefficenti di Fourier di f. La conclusione viene dal

Principio di identitá. *Siano* $f, g \in C_{2\pi}$. *Se* $\hat{f}_n = \hat{g}_n \quad \forall n \in \mathbf{Z}$, *allora* $f \equiv g$.

Il Principio di Identitá é, a sua volta, conseguenza del (giá provato!)

Lemma di densitá. *Data* $f \in C_{2\pi}$ *esiste una successione di polinomi trigonometrici* P_n *convergente uniformemente a* f *in* $\mathbf{R}$.

Deduciamo il Principio di Identitá dal Lemma di Densitá .
Basta provare che $\hat{f}_n = 0 \quad \forall n \in \mathbf{Z} \Rightarrow f \equiv 0$. Sia $P_N = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{int}$. Allora

$$0 = \hat{f}_n = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt \quad \forall n \in \mathbf{Z} \quad \Rightarrow \quad 2\pi < f, P_N >= \sum_{n=-N}^{N} \hat{c}_n \int_{-\pi}^{\pi} f e^{-int} = 0$$

Sia ora $P_N, N \in \mathbf{N}$ successione di polinomi trigonometrici convergente uniformemente a f: $\quad \hat{f}_n = 0 \quad \forall n \in \mathbf{Z}, \|\overline{P_N} - \overline{f}\|_\infty \to_{N\to+\infty} 0 \quad \Rightarrow$

$$0 = \int_{-\pi}^{\pi} f\overline{P_N}dt \to \int_{-\pi}^{\pi} f\overline{f} = \int_{-\pi}^{\pi} |f|^2 dt \quad \Rightarrow \quad f \equiv 0$$

Teorema 2. *Ogni $f \in C^1_{2\pi}$ é sviluppabile in serie di Fourier.*

ove $f \in C^1_{2\pi}(\mathbf{R}, \mathbf{C}) \Leftrightarrow \Re f, \Im f \in C^1_{2\pi}(\mathbf{R})$ e $f' := (\Re f)' + i(\Im f)'$. Premettiamo due proprietá dei coefficenti di Fourier:

Proposizione Sia $f \in C^1_{2\pi}$. Allora $\quad \hat{f}_n = -\frac{1}{in}\hat{f'}_n \qquad \forall n \in \mathbf{Z}$

Infatti, per periodicitá, $\quad 0 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \left(f(t)e^{-int}\right)' dt = \hat{f'}_n - i\, n\, \hat{f}_n$

Diseguaglianza di Bessel. Sia $f \in C_{2\pi}$. Allora

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{f}_n|^2 \le \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt$$

Prova Sia $P_N = \sum\limits_{n=-N}^{N} \hat{f}_n e^{int}$. Da Pitagora, $\quad \|P_N\|_2^2 = \sum\limits_{n=-N}^{N} |\hat{f}_n|^2 \qquad$ mentre

$$< f, P_N >= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f \overline{\sum_{n=-N}^{N} \hat{f}_n e^{int}} dt = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-N}^{N} \overline{\hat{f}_n}\int_{-\pi}^{\pi} f e^{-int} = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-N}^{N} \overline{\hat{f}_n}\hat{f}_n = \sum_{n=-N}^{N} |\hat{f}_n|^2$$

e quindi, usando Cauchy-Schwartz $\qquad \|P_N\|_2^2 =< f, P_N >\le \|f\|_2 \, \|P_N\|_2$.

Prova del Teorema 2. Dalla Proposizione, Cauchy-Schwartz e Bessel,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{f}_n| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n}|\hat{f'}_n| \le \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{f'}_n|^2\right)^{\frac{1}{2}} \le C\int_{-\pi}^{\pi} |f'(t)|^2 dt$$

Basta ora applicare il Teorema 1.

Coefficenti e serie di Fourier per funzioni discontinue. Sia $LI_{2\pi}$ lo spazio vettoriale sui complessi delle funzioni $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ che sono 2π periodiche, limitate e tali che $\Re f$ e $\Im f$ siano integrabili in $[-\pi, \pi]$. In $LI_{2\pi}$ sono definiti il prodotto scalare $< f, g >= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f\, \overline{g} dt$ e la associata norma $\quad \|f\|_2^2 =< f, f > \quad$. Continuano

(ovviamente) a valere Cauchy-Schwartz e Pitagora.
Sono ugualmente definiti i coefficenti di Fourier di una $f \in LI_{2\pi}$, dati da

$$\hat{f}_n := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}dt \qquad n \in \mathbf{Z}$$

Anche in questo ambito piú generale continua a valere la diseguaglianza di Bessel:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{f}_n|^2 \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt \quad \forall f \in LI_{2\pi}$$

Convergenza puntuale nelle serie di Fourier: il criterio di Dini. Sia $f \in LI_{2\pi}$. La serie di Fourier di f converge a f in tutti i punti $\tau \in [-\pi, \pi]$ tali che

$$\exists \delta = \delta(\tau) : \qquad \sup_{|t|\leq\delta}\left|\frac{f(t+\tau) - f(\tau)}{t}\right| < \infty$$

ovvero $f(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}_n e^{in\tau}$ in tutti i punti τ attorno ai quali il rapporto incrementale rimane limitato.

Prova del Teorema 2. Sostituendo eventualmente f con $f(t+\tau) - f(\tau)$ possiamo supporre che $\tau = 0$, $f(0) = 0$, che $\frac{f(t)}{t}$ sia limitata in $[-\delta, \delta]$ e provare che

$$f(0) = 0 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}_n$$

Scriviamo

$$F(t) := \frac{f(t)}{e^{it} - 1}, \qquad f(t) = F(t)e^{it} - F(t)$$

La funzione $F(t)$ é continua in $t \neq 0$ e limitata anche attorno a zero, perché $F(t) = \frac{f(t)}{t}\frac{t}{\cos t + i \sin t - 1}$ e $\frac{f(t)}{t}$ é limitata per ipotesi mentre $\frac{t}{\cos t + i \sin t - 1} = \frac{2t}{t^2 + i \sin t} \to_{t\to 0} \frac{2}{i}$ ed é quindi anche lei limitata. Ma

$$\hat{f}_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} [Fe^{it} - F]\, e^{-int}dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} Fe^{-i(n-1)t}dt - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} Fe^{-int} = \hat{F}_{n-1} - \hat{F}_n$$

Dunque,

$$\sum_{n=-N}^{N} \hat{f}_n = \sum_{n=-N}^{N} [\hat{F}_{n-1} - \hat{F}_n] = \hat{F}_{-N-1} - \hat{F}_N \to_N 0$$

perché, per la diseguaglianza di Bessel, $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{F}_n|^2 \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |F(t)|^2 dt < \infty$ e quindi $F_n \to_{|n|\to\infty} 0$,

SPAZI METRICI ED IL TEOREMA DELLE CONTRAZIONI

Ricordiamo che si dice **metrica, o distanza** su X una funzione

$$d : X \times X \to \mathbf{R} \qquad \text{tale che}$$

(i) $d(x, y) \geq 0 \quad \forall x, y \in X \quad$ e $\quad d(x, y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = y$
(ii) $d(x, y) = d(y, x) \quad \forall x, y \in X$
(iii) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \quad \forall x, y, z \in X$ (**diseguaglianza triangolare**)

La coppia (X, d) si chiama spazio metrico. Se $A \subset X$, $d_{|A}$ é metrica (indotta) su A.

Sia V spazio vettoriale (su $\mathbf{R}$ o $\mathbf{C}$) e $p : V \to \mathbf{R}$; p é una norma su V se

(i) $p(x) \geq 0 \quad \forall x \in V \quad$ e $\quad p(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$
(ii) $p(tx) = |t|p(x) \quad \forall t \in \mathbf{R}, \forall x \in V$ e
(iii) $p(x + y) \leq p(x) + p(y) \quad \forall x, y \in V$ **diseguaglianza triangolare**

SPAZI METRICI COMPLETI, SPAZI DI BANACH

Una **successione** x_n in uno spazio metrico (X, d) si dice **di Cauchy** se

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists n_\epsilon : \qquad d(x_n, x_m) \leq \epsilon \quad \forall n, m \geq n_\epsilon$$

(X, d) si dice **completo** se ogni successione di Cauchy in X é convergente in X.

$(V, \|.\|)$ si dice di **Banach** se, come spazio metrico, é completo:

$$x_n \in V,\ \|x_n - x_m\| \leq \epsilon \text{ per } n, m \text{ grandi} \quad \Rightarrow \quad \exists x \in V : \quad \|x_n - x\| \to_n 0.$$

ESEMPI. 1. Un sottoinsieme chiuso di uno spazio metrico completo é completo (per la metrica indotta).

2. $\mathbf{R}^n$, munito della norma euclidea, é un Banach.

3. Sia $K \subset \mathbf{R}^n$ compatto. $C(K, \mathbf{R}^m)$, con $\|f\|_\infty = \sup_{x \in K} \|f(x)\|$ é un Banach.
Prova. Siccome $f_n \to f$ uniformemente ($f_n = ((f_n)_1, \ldots, (f_n)_m), \quad f = (f_1, \ldots, f_m)$) se e solo se $(f_n)_i \to f_i \quad \forall i = 1, \ldots, m$ uniformemente, basta provarlo nel caso $n = 1$. Ora, f_n é di Cauchy in $C(K, \mathbf{R}) \quad \Leftrightarrow$

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists n_\epsilon : \ n, m \geq n_\epsilon \quad \Rightarrow \quad \sup_{x \in K} |f_n(x) - f_m(x)| \leq \epsilon$$

Dunque, se f_n é di Cauchy in $C(K, \mathbf{R})$, per ogni fissato x in K, la successione $n \to f_n(x)$ é di Cauchy, e quindi $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ esiste finito per ogni x in K. Poi, $\forall \epsilon > 0, \quad \exists n_\epsilon$:

$$|f_n(x) - f(x)| \leq |f_n(x) - f_{n+p}(x)| + |f_{n+p}(x) - f(x)| \leq \epsilon + |f_{n+p}(x) - f(x)| \ \forall x \in K$$

se $n \geq n_\epsilon$ e quale che sia $p \in \mathbf{N}$. Fissato $n \geq n_\epsilon$ e mandando p all'infinito in $|f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon + |f_{n+p}(x) - f(x)| \quad \forall x \in K$ si ottiene $|f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon \quad \forall x \in K$ e per ogni $n \geq n_\epsilon$ cioé f_n converge uniformemente ad f, ovvero $\|f_n - f\|_\infty \to_n 0$.

4. Come in 4., segue che lo spazio dei 'cammini continui' $\quad E := C([a,b], \mathbf{R}^m) \quad$ munito della norma della convergenza uniforme $\quad \|\gamma\|_\infty := \max\limits_{[a,b]} \|\gamma(t)\| \quad$ ove $\quad \|\gamma(t)\|^2 = \sum_{i=1}^m |\gamma_i(t)|^2$ é spazio di Banach.

5. $C([a,b], \mathbf{R})$, munito della norma $\quad \|f\|_1 := \int\limits_a^b |f(t)|dt \quad$ non é completo.

Infatti, se $f_n(x) := |x|^{\frac{1}{n}} sign x, \quad x \in [-1,1]$, risulta $\int\limits_{-1}^{1} |f_n(x) - sign x| dx \to_n 0$ e quindi f_n é di Cauchy in $(C([a,b], \mathbf{R}), \|.\|_1)$, ma non esiste $g \in C([a,b], \mathbf{R})$ tale che $\|f_n - g\|_1 \to_n =$. Per tale g sarebbe $\int\limits_{\delta}^{1} |g(x) - 1| \leq \int\limits_{\delta}^{1} |g(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - 1| dx \to_n 0$, e quindi, essendo g continua, sarebbe $g(x) = 1 \quad \forall x \in [\delta, 1]$ e, analogamente, $g(x) = -1 \quad \forall x \in [-1, -\delta]$. Dunque g non puó essere continua (in zero).

IL TEOREMA DELLE CONTRAZIONI

Sia (X, d) spazio metrico completo, $C \subset X$ chiuso. Sia $T : X \to X$. Se

(i) $\quad T(C) \subset C$

(ii) $\quad \exists k \in (0,1) : \quad d(Tx, Ty) \leq d(x,y) \quad \forall\, x, y \in C \quad$ (T é una **'contrazione'**)

allora $\qquad \exists! x \in C : \qquad Tx = x$

Unicitá: $\quad Tx = x, \quad Ty = y \quad \Rightarrow \quad x = y. \qquad$ Infatti,

$$d(x,y) = d(Tx, Ty) \leq k\, d(x,y) \quad \Rightarrow \quad d(x,y) = 0 \quad \text{perché } k \in (0,1).$$

Esistenza. Sia $x_0 \in C$. Consideriamo la successione definita per ricorrenza

$$x_1 := Tx_0, \quad x_2 := Tx_1, \quad \ldots, \quad x_{n+1} := Tx_n$$

Basta provare che x_n é di Cauchy, perché allora, per completezza, esiste x tale che $x_n \to x$ con $x \in C$ perché C é chiuso. Per continuitá $x_{n+1} = Tx_n \to_n Tx$. Siccome é anche $x_{n+1} \to x$ avremo $x = Tx$ (unicitá del limite).

Proviamo dunque che x_n é di Cauchy. É

$$d(x_2, x_1) = d(Tx_1, Tx_0) \leq kd(x_1, x_0)$$

Ugualmente, $d(x_3, x_2) = d(Tx_2, Tx_1) \leq kd(x_2, x_1) \leq k^2 d(x_1, x_0)$. Iterando,

$$d(x_{n+1}, x_n) = d(Tx_n, Tx_{n-1}) \leq kd(x_n, x_{x_{n-1}}) \leq k^n d(x_1, x_0) \quad \forall\, n$$

Dunque $\quad d(x_{n+p+1}, x_n) \leq d(x_{n+p+1}, x_{n+p}) + \ldots + d(x_{n+1}, x_n) \leq$

$$\leq \left[k^{n+p} + \ldots + k^n\right] d(x_1, x_0) \leq k^n \left[\sum_{j=0}^{\infty} k^j\right] d(x_1, x_0) \ \to_n 0$$

UN ESEMPIO. $f \in C^1(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ tale che $|f'(x)| \leq L < 1 \quad \forall x \in \mathbf{R}$.

ESEMPI COMPLEMENTI ED ESERCIZI

ESEMPI

1. $l^p := \{x : \mathbf{N} \to \mathbf{R} | \sum\limits_{n=1}^{\infty} |x(n)|^p < +\infty\}$ é, se $p \geq 1$, il sottospazio (lineare) di l^∞ delle **successioni di potenza p-esima sommabile**. Una norma su l^p é

$$\|x\|_p := \left[\sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|^p\right]^{\frac{1}{p}}$$

Per vedere che $\|.\|_p$ é effettivamente una norma basta verificare la diseguaglianza triangolare. Intanto, vale la **diseguaglianza di Holder**: se $p, q > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q}$ allora

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x(n)\, |y(n)| \leq \left[\sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|^p\right]^{\frac{1}{p}} \left[\sum_{n=1}^{\infty} |y(n)|^q\right]^{\frac{1}{q}} \quad \forall\, x \in l^p,\ y \in l^q$$

Infatti, dalla diseguaglianza di convessitá

$$p, q > 1, \quad \tfrac{1}{p} + \tfrac{1}{q} = 1 \qquad \Rightarrow \qquad |xy| \leq \tfrac{|x|^p}{p} + \tfrac{|y|^q}{q} \quad \forall x, y \in \mathbf{R},$$

segue

$$\frac{|x(n)|}{\|x\|_p}\frac{|y(n)|}{\|y\|_q} \leq \frac{1}{p}\frac{|x(n)|^p}{\|x\|_p^p}+\frac{1}{q}\frac{|y(n)|^q}{\|y\|_q^q} \quad \forall n \in \mathbf{N} \quad \text{e quindi} \quad \frac{\sum_{n=1}^{\infty}|x(n)\,|y(n)|}{\|x\|_p\,\|y\|_q} \leq \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$$

Siccome $q=\frac{p}{p-1}$, da Holder deduciamo che

$$\sum_{n=1}^{\infty}|x(n)+y(n)|^p \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty}|x(n)+y(n)|^{p-1}|x(n)|\right)+\left(\sum_{n=1}^{\infty}|x(n)+y(n)|^{p-1}|y(n)|\right) \leq$$

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}|x(n)+y(n)|^p\right)^{\frac{p-1}{p}}\|x\|_p+\left(\sum_{n=1}^{\infty}|x(n)+y(n)|^p\right)^{\frac{p-1}{p}}\|y\|_p$$

e quindi

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}|x(n)+y(n)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty}|x(n)|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{n=1}^{\infty}|y(n)|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

cioé la diseguaglianza triangolare, qui anche detta **diseguaglianza di Minkowskii**.

2. (la funzione 'distanza da un punto' é continua) Fissato $x_0 \in X$ spazio metrico, la funzione 'distanza da x_0',

$$d_{x_0}: X \to \mathbf{R}, \qquad d_{x_0}(x) := d(x,x_0)$$

é Lipschitziana (e quindi continua) perché

$$d(x,x_0) \leq d(x,y)+d(x_0,y), \qquad d(y,x_0) \leq d(x,y)+d(x,x_0) \qquad \Rightarrow$$

$$|d(x,x_0)-d(y,x_0)| \leq d(x,y)$$

In particolare ció implica che $\overline{B}_r(x_0) := \{x \in X : \ d_{x_0}(x)=d(x,x_0) \leq r\}$ ('palla chiusa' di centro x_0 e raggio $r>0$) é un insieme chiuso, grazie alla seguente proprietá: se X,Y sono spazi metrici e $f: X \to Y$ é continua , allora

$O \subset Y$ **aperto,** $F \subset Y$ **chiuso** $\Rightarrow f^{-1}(O)$ **é aperto e** $f^{-1}(F)$ **é chiuso**

Infatti $x_n \in f^{-1}(F), x_n \to_n x \Rightarrow f(x_n) \in F$ e $f(x_n) \to_n f(x) \Rightarrow x \in f^{-1}(F)$ cioé $f^{-1}(F)$ é chiuso. L'altra affermazione segue dal fatto che $[f^{-1}(O)]^c = f^{-1}(O^c)$.

3 (diseguaglianza di Cauchy-Schwartz). $b(f,g) := \int_a^b f(t)g(t)dt$ é un prodotto scalare in $C([a,b],\mathbf{R})$ e vale quindi la diseguaglianza di Cauchy-Schwartz

$$|\int_a^b f(t)g(t)dt| \leq \left(\int_a^b |f(t)|^2dt\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_a^b |g(t)|^2dt\right)^{\frac{1}{2}}$$

Inoltre, $C([a,b],\mathbf{R})$, munito della norma $\|f\|_2 = \left(\int\limits_a^b |f(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}$ non é completo.

4 (diseguaglianza di Holder). Vale la piú generale diseguaglianza di Holder: se $p,q > 1$ e $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, allora

$$|\int\limits_a^b f(t)g(t)dt| \leq \left(\int\limits_a^b |f(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int\limits_a^b |g(t)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}} \qquad \forall f,g \in C([a,b],\mathbf{R})$$

5. $l^p, \quad p \geq 1$ é completo.

6. l^∞ é completo.

7: (lo spazio $C_{2\pi}(\mathbf{R},\mathbf{C})$) Sia $C_{2\pi}$ lo spazio vettoriale su $\mathbf{C}$ delle funzioni $f:\mathbf{R}\to\mathbf{C}$ continue e 2π periodiche. Allora $\|f\|_\infty := \sup\limits_{t\in\mathbf{R}} |f(t)|$ é una norma su $C_{2\pi}$, che, munito di tale norma, risulta completo.

Inoltre, $\|f\|_2 := \left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}$ é una norma su $C_{2\pi}$ e vale Cauchy-Schwartz:

$$|\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\overline{g(t)}dt| \leq \left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} |g(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}$$

ESERCIZI

1. La chiusura di l^1 in l^∞ é $c_0 := \{x \in l^\infty | \quad x(n) \to_n 0\}$.

Infatti c_0 é chiuso perché se $x_j \in c_0$ e $\|x_j - x\|_\infty \to_j 0$ ovvero $\sup\limits_n |x_j(n) - x(n)| \leq \epsilon$ per $j \geq j_\epsilon$ allora $|x(n)| \leq |x(n) - x_{j_\epsilon}(n)| + |x_{j_\epsilon}(n)| \leq \epsilon + |x_{j_\epsilon}(n)| \leq 2\epsilon$ se n é tale che $|x_{j_\epsilon}(n)| \leq \epsilon$ ovvero per tutti gli n abbastanza grandi e quindi $x \in c_0$. Ma se $x \in c_0$ e $x_j(n) := x(n)$ se $n \leq j$ e $x_j(n) = 0$ se $n > j$, allora $\|x - x_j\|_\infty = \sup\limits_{n>j} |x(n)| \to_j 0$.

2. Sia $e_i : j \to \delta_{ij}, i,j \in \mathbf{N}$. Sia X la varietá lineare generata dagli e_i. Provare che la chiusura di X in l^∞ é c_0.

3. Sia X come in 2. Provare che X é densa in l^p per ogni p.

Infatti, se $x \in c_0$, sia $x_n := \sum_{j=1}^n x(j)e_j$. Allora $\|x - x_n\|_\infty = \sup\limits_{j>n} |x(j)| \to_n 0$.
Poi, dato $x \in l^p$, se $x_n := \sum_{j=1}^n x(j)e_j$, allora $\|x - x_n\|^p = \sum_{j>n} |x(j)|^p \to_n 0$.

4. Sia $E = C([a, b], \mathbf{R})$ dotato dell norma $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x\in[a,b])} |f(x)|$.
Provare che la funzione (lineare in $f \in C([a, b])$)

$$l(f) := \int\limits_a^b f(x)dx$$

é definita su E ed é continua da E ad $\mathbf{R}$.

5. (i) Provare che $C_0(\mathbf{R})$ dotato della norma della convergenza uniforme $\|f\|_\infty = \sup_x |f(x)|$ non é completo.
Provare poi che $V := \{f \in C(\mathbf{R}) : \quad f(x) \to_{|x|\to\infty} 0\}$ dotato della norma della convergenza uniforme é completo, e che $C_0(\mathbf{R})$ é denso in V.

(ii) Provare che $C_0^\infty(\mathbf{R})$ dotato della norma della convergenza in media $\|f\|_1 = \int_{\mathbf{R}} |f(t)|dt$ non é completo.
Provare che $\|.\|_1$ non é una norma su V.
Provare che $\|.\|_1$ é una norma in $W := \{f \in C(\mathbf{R}) : \quad \int_{\mathbf{R}} |f| < \infty\}$ e che W, dotato di tale norma, non é completo.

6. Sia $k \in C([a, b] \times [c, d])$. Per ogni $f \in c([a, b])$ la funzione

$$(Tf)(t) := \int\limits_a^b k(x, t)f(x)dx$$

é, in virtú del teorema sugli integrali dipendenti da parametro, una funzione continua in $[c, d]$. Inoltre

$$\|Tf - Tg\|_\infty = \sup_{x\in[a,b])} |\int\limits_a^b k(x, t)[f(x) - g(x)]dx| \leq \left(\sup_{(x,t)\in[a,b]\times[c,d])} |k(x, t)| \right) \|f - g\|_\infty$$

Dunque T é una funzione (lineare) e Lipschitziana (e quindi continua) da $C([a, b], \mathbf{R})$ a $C([c, d], \mathbf{R})$ dotati della norma della convergenza uniforme.