

AM210: Tracce delle lezioni- I Settimana (2011-12)

FUNZIONI DI PIÚ VARIABILI

Sia $n \in \mathbf{N}$. Una *funzione reale di n variabili reali* é una funzione

$$f : A \rightarrow \mathbf{R}, \quad A \subset \mathbf{R}^n = \mathbf{R} \times \dots \times \mathbf{R} \quad n \text{ volte}$$

Il *grafico* di f é $\mathcal{G}_f := \{(x, f(x)) \in \mathbf{R}^{n+1} = \mathbf{R}^n \times \mathbf{R} : x \in A\}$.

Gli elementi di \mathbf{R}^n , detti anche **punti o vettori** di \mathbf{R}^n , si denotano come $x = (x_1, \dots, x_n)$ e gli 'scalari' x_j si dicono componenti o coordinate di x . I vettori di \mathbf{R}^2 ed \mathbf{R}^3 si scrivono anche (x, y) , (x, y, z) .

Primi esempi di funzioni di piú variabili:

1. $f(x, y) = ax + by$, funzione *lineare* di due variabili, ha come grafico il piano (nello spazio ordinario) di equazione $z = ax + by$. Piú in generale

$$f(x) = f(x_1, \dots, x_n) = a_1x_1 + \dots + a_nx_n = \sum_{j=1}^n a_jx_j \quad (\text{funzione lineare})$$

ha per grafico un 'iperpiano' in \mathbf{R}^{n+1} passante per l'origine $0 := (0, \dots, 0)$.

2. $f(x, y) = x^2 + y^2$. \mathcal{G}_f é la superficie (nello spazio cartesiano $Oxyz$) ottenuta ruotando attorno all'asse Oz la parabola nel piano Oxz di equazione $z = x^2$.

I polinomi in n variabili. Dato $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbf{N}^n$ e $x \in \mathbf{R}^n$, scriveremo $x^\alpha := \prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i}$, $|\alpha| := \alpha_1 + \dots + \alpha_n$. Un polinomio di grado p nelle x_i si scrive

$$P(x) = \sum_{|\alpha| \leq p} c_\alpha x^\alpha$$

Una funzione *vettoriale* (o a valori vettoriali) di n variabili reali é una funzione

$$f : A \rightarrow \mathbf{R}^m, \quad A \subset \mathbf{R}^n, m \geq 2 \quad f(x) = (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n))$$

Le f_j si chiamano le (funzioni) componenti di f .

Se $n = 1$, f si dice anche *curva parametrica o cammino* in \mathbf{R}^m .

Ad esempio, dato $x \in \mathbf{R}^m$, $f(t) := tx$ é funzione (lineare) su \mathbf{R} a valori in \mathbf{R}^m ; la sua immagine $\Im f = \{tx : t \in \mathbf{R}\}$ é la retta in \mathbf{R}^m passante per l'origine e per x (sottospazio lineare *generato* da x).

Un altro esempio: fissato $r > 0$, $f : \theta \rightarrow (r \cos \theta, r \sin \theta)$, $t \in [0, 2\pi)$ é (nel piano) la circonferenza di centro l'origine e raggio r (in forma parametrica).

Piú in generale, una $f : A \rightarrow \mathbf{R}^n$, $A \subset \mathbf{R}^k$ é *k -superficie* (parametrica) in \mathbf{R}^n . Ad esempio,

$$f : (\theta, \varphi) \rightarrow (R \cos \varphi \cos \theta, R \cos \varphi \sin \theta, R \sin \varphi), \quad \theta \in [0, 2\pi), \varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

é sfera (parametrica) di centro l'origine e raggio R in \mathbf{R}^3 .

STRUTTURA ALGEBRICA in \mathbf{R}^n

Un insieme V si dice **spazio vettoriale (o lineare)** su \mathbf{R} se sono definite

$$\text{una operazione di addizione} \quad V \times V \rightarrow V, \quad (u, v) \rightarrow u + v$$

$$\text{una moltiplicazione per scalari} \quad \mathbf{R} \times V \rightarrow V, \quad (t, v) \rightarrow tv$$

tali che $(V, +)$ sia gruppo commutativo e risulti, per ogni $u, v \in V$, $s, t \in \mathbf{R}$,

$$(t + s)u = tu + su, \quad t(u + v) = tu + tv, \quad t(sv) = (ts)v, \quad 1v = v$$

Gli elementi di V si chiamano punti o **vettori**.

ESEMPIO: \mathbf{R}^n , con le operazioni

$$(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) := (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n), \quad t(x_1, \dots, x_n) := (tx_1, \dots, tx_n)$$

Interpretazione geometrica. Come noto, \mathbf{R}^2 si rappresenta mediante i punti di un piano cartesiano Oxy . In tale piano, dato $v = (x_0, y_0) \in \mathbf{R}^2$, l'insieme

$$\mathbf{R}v := \{tv = (tx_0, ty_0) : t \in \mathbf{R}\}$$

é l'insieme dei punti della *retta (in forma) parametrica* $x = tx_0, \quad y = ty_0$, retta che passa per l'origine $O := (0, 0)$ (quando $t = 0$) e per v (quando $t = 1$); infatti, eliminando il *parametro* t , troviamo l'*equazione cartesiana* $y = \frac{y_0}{x_0}x$.

Similmente, $\{tv + u : t \in \mathbf{R}, v = (x_0, y_0), u = (x_1, y_1)\}$ é la (rappresentazione parametrica della) retta passante per u e parallela alla retta $\mathbf{R}v$, ed infatti, eliminando il parametro, troviamo $y = (x - x_1)\frac{y_0}{x_0} + y_0$.

In particolare, $u + v$ é il punto comune alle rette $\{tu + v : t \in \mathbf{R}\}$ e $\{u + tv : t \in \mathbf{R}\}$ e si chiama *traslazione di u lungo v* . Tale interpretazione geometrica si estende al caso generale $n > 2$.

Altri esempi

$\mathbf{R}^\infty = \mathbf{R}^{\mathbf{N}} = \{\alpha : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{R}\}$ dotato delle operazioni

$$(\alpha + \beta)(j) := \alpha(j) + \beta(j) \quad \forall j \in \mathbf{N}, \quad (t\alpha)(j) := t\alpha(j) \quad \forall t \in \mathbf{R}, j \in \mathbf{N}$$

$\mathbf{R}^{[a,b]} := \{f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}\}$ dotato delle operazioni

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x) \quad \forall x \in [a, b], \quad (tf)(x) := tf(x) \quad \forall t \in \mathbf{R}, x \in [a, b]$$

$C([a, b]) := \{f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}, f \text{ continua}\}$

Combinazioni lineari e lineare indipendenza, sottospazi lineari, basi

1. Se $u, v \in V$ e $s, t \in \mathbf{R}$, $su + tv$ é combinazione lineare di u, v con coefficienti s, t . Dato $A \subset V$, scriveremo

$\langle A \rangle :=$ insieme delle combinazioni lineari di elementi di A .

Diremo che $v_j, j = 1, \dots, p$ sono tra di loro linearmente indipendenti se

$$\sum_{j=1}^p t_j v_j = 0 \quad \Rightarrow \quad t_j = 0 \quad \forall j$$

2. $V_0 \subset V$ é sottospazio lineare se $u, v \in V_0, s, t \in \mathbf{R} \Rightarrow su + tv \in V_0$.
Chiaramente $\langle A \rangle$ é sottospazio lineare (generato da A).

Esempi. Siano

$$l^\infty := \{\alpha \in \mathbf{R}^\infty : \sup_j |\alpha(j)| < +\infty\}, \quad c_0 := \{\alpha \in \mathbf{R}^\infty : \alpha(j) \rightarrow_j 0\}$$

$$\text{se } p > 0, \quad l^p := \{\alpha \in \mathbf{R}^\infty : \sum_{j=1}^\infty |\alpha(j)|^p < +\infty\}$$

Allora, $l^p \subset c_0 \subset l^\infty$ e sono sottospazi lineari di \mathbf{R}^∞ .

Che l^p sia lineare segue, quando $p \geq 1$, dalla convessità di $f(t) = |t|^p$, giacché in tal caso $|a + b|^p \leq 2^{p-1}(|a|^p + |b|^p)$, che dá appunto $\alpha, \beta \in l^p \Rightarrow \alpha + \beta \in l^p$, mentre, se $p \leq 1$ si ha $|a + b|^p \leq |a|^p + |b|^p$, giacché $(1 + x)^p \leq 1 + x^p \quad \forall x \geq 0$, perché $[1 + x^p - (1 + x)^p]' = px^{p-1}[1 - (\frac{1}{x} + 1)^{p-1}] \geq 0 \quad \forall x \geq 0$.

3. Un sistema di vettori linearmente indipendenti $v_i : i = 1, \dots, n$ che generino V si chiama **base** di V . Ricordiamo che se V ha una base di n elementi, ogni altra base di V ha esattamente n elementi, e tale numero si chiama la **dimensione** di V . Se v_j forma una base per V , allora ogni $v \in V$ si scrive, in modo unico, nella forma $v = \sum_{j=1}^n c_j v_j$. I numeri c_j si chiamano *componenti o coordinate* di v nella base v_j . Ad esempio, se $e_1 = (1, 0, \dots, 0), \dots, e_n = (0, 0, \dots, 1)$ é la base canonica di \mathbf{R}^n , un vettore x di \mathbf{R}^n si scrive $x = (x_1, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^n x_j e_j$ ($x_j =$ componenti o coordinate di x nella base e_j).

Trasformazioni lineari. Siano V, W spazi vettoriali su \mathbf{R} . Una funzione

$$L : V \rightarrow W \quad \text{si dice lineare se} \quad L(su + tv) = sL(u) + tL(v) \quad \forall u, v \in V$$

Chiaramente $\Im L = \{L(u) : u \in V\}$ e $\text{Ker} L := \{v \in V : L(v) = 0\}$ sono sottospazi lineari rispettivamente di W, V .

Inoltre, se $\text{Ker} L = \{0\}$, cioè L é iniettiva, e $\Im L = W$, cioè L é anche suriettiva, allora esiste la funzione inversa, L^{-1} , ed é anch'essa lineare. In tal caso L si chiama

isomorfismo lineare e V e W si dicono (algebricamente) **isomorfi**.

Esempio 1. Sia $V = C^1(\mathbf{R}), W = C(\mathbf{R})$. La trasformazione D che manda $f \in V$ nella sua derivata, $D(f) := f'$ é chiaramente lineare da V in W , con $\text{Ker} D$ dato dalle funzioni costanti. Siccome ogni funzione continua é dotata di primitiva, D é suriettivo. Ma, indicato con V_0 il sottospazio di V formato dalle funzioni che si annullano in $x = 0$, $D|_{V_0}$, cioé la restrizione di D a V_0 , é un isomorfismo tra V_0 e W .

Chiaramente $D^{-1}(g) = \int_0^x g$.

Esempio 2. Data $\mathcal{A} = (a_{ij})_{i=1, \dots, m; j=1, \dots, n}$ matrice $m \times n$ (m righe ed n colonne),

$$L_{\mathcal{A}}(x) := \mathcal{A}x = \left(\sum_{j=1}^n a_{1j}x_j, \dots, \sum_{j=1}^n a_{mj}x_j \right) \quad \forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$$

é funzione (o trasformazione) lineare da \mathbf{R}^n a \mathbf{R}^m . Il suo nucleo é l'insieme delle soluzioni del sistema lineare omogeneo di m equazioni nelle n incognite x_1, \dots, x_n

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = 0 \quad i = 1, \dots, m$$

$\mathfrak{S}L_{\mathcal{A}} = \{y \in \mathbf{R}^m : \exists x \in \mathbf{R}^n, \mathcal{A}x = y\}$ é il sottospazio lineare di \mathbf{R}^m generato dai vettori $f_j := L_{\mathcal{A}}(e_j)$, se $e_j, j = 1, \dots, n$ base (canonica) di \mathbf{R}^n ; gli f_j sono le colonne di \mathcal{A} . Quindi la dimensione di $\mathfrak{S}L_{\mathcal{A}}$ é pari al rango di \mathcal{A} .

Matrice rappresentativa. Viceversa, se $e_i, i = 1, \dots, n$, $f_j, j = 1, \dots, m$ sono basi di V, W , rispettivamente, ogni trasformazione lineare da V a W si rappresenta mediante una matrice $m \times n$.

Sia infatti L trasformazione lineare da V a W . Siano, per ogni j , $a_{ij}, i = 1, \dots, m$ le componenti di Le_j nella base f_i , cioé

$$Le_j = \sum_{i=1}^m a_{ij}f_i$$

Allora, se $u = \sum_{j=1}^n x_j e_j$ e $v := L(u) = \sum_{i=1}^m y_i f_i$, si ha

$$v = \sum_{i=1}^m y_i f_i = Lu = \sum_{j=1}^n x_j L(e_j) = \sum_{j=1}^n x_j \left(\sum_{i=1}^m a_{ij} f_i \right) = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right) f_i$$

ovvero, se $y = (y_1, \dots, y_m)$, $x = (x_1, \dots, x_n)$, posto $\mathcal{A}_L := (a_{ij})$, si ha $y = \mathcal{A}_L x$. Cioé, identificando u ed Lu con le loro coordinate x ed y , L opera su x come \mathcal{A}_L , che si chiama quindi matrice rappresentativa di L nelle basi date.

PRODOTTO SCALARE

Sia V spazio lineare su \mathbf{R} . Una $b : V \times V \rightarrow \mathbf{R}$ si dice prodotto scalare in V se é

simmetrica $b(u, v) = b(v, u) \quad \forall u, v \in V$

bilineare: $b(su + tv, w) = sb(u, w) + tb(v, w), \quad \forall u, v, w \in V, \forall s, t \in \mathbf{R}$

positiva $b(u, u) > 0 \quad \forall u \neq 0$

Un prodotto scalare, se non c'è confusione, si indica usualmente $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

NOTA. Se $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é prodotto scalare in V , allora, per ogni $u \in V$,

le applicazioni $v \rightarrow \langle u, v \rangle$ sono lineari.

Esempi. Sia $e_j : j = 1, \dots, n$ base per V , vettoriale.

Dati $u := u = \sum_{j=1}^n x_j e_j, v := v = \sum_{j=1}^n y_j e_j,$

$$\langle u, v \rangle := \sum_{j=1}^n x_j y_j \quad \text{é prodotto scalare.}$$

Prodotto scalare in $C([a, b])$. $\langle f, g \rangle := \int_a^b f(x)g(x)dx$.

Norma.

Sia V vettoriale. Una applicazione di V in $\mathbf{R}, v \rightarrow \|v\|$ si dice norma in V se

(i) $\|v\| \geq 0 \quad \forall v \in V$ e $\|v\| = 0$ se e solo se $v = 0$, (positività)

(ii) $\|tu\| = |t| \|u\| \quad \forall u \in V, t \in \mathbf{R}$ (positiva omogeneità)

(iii) $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\| \quad \forall u, v \in V$ (diseguaglianza triangolare)

Uno spazio vettoriale V , dotato di una norma, si dice **Spazio Normato**

CAUCHY-SCHWARTZ Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ prodotto scalare in V . Sia

$$\|v\| := \sqrt{\langle v, v \rangle} \quad \forall v \in V$$

Allora $|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \|v\| \quad \forall u, v \in V$.

Corollario: $v \rightarrow \sqrt{\langle v, v \rangle}$ é una norma.

Prova. $0 \leq \langle u + tv, u + tv \rangle = \|u\|^2 + 2t \langle u, v \rangle + t^2 \|v\|^2 \quad \forall t \Rightarrow \langle u, v \rangle^2 - \|u\|^2 \|v\|^2 \leq 0$.

Inoltre, $\sqrt{\langle v, v \rangle} \geq 0$ e $\sqrt{\langle v, v \rangle} = 0 \Rightarrow v = 0$. Infine :

$$\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2 \langle u, v \rangle \leq \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2 \|u\| \|v\| = (\|u\| + \|v\|)^2$$

Esempi. In \mathbf{R}^n . $\|x\| := \sqrt{\sum_{j=1}^n |x_j|^2}$ é una norma (la *norma euclidea*). La diseguglianza triangolare si scrive

$$\left(\sum_{j=1}^n |x_j + y_j|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{j=1}^n |y_j|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Se $n = 2$, $\|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}$ é la lunghezza del vettore (x, y) , ovvero del segmento di estremi (x, y) e $(0, 0)$.

Prodotto scalare e norma in l^2 . Se $\alpha, \beta \in l^2$, allora, per ogni N risulta

$$\sum_{j=1}^N |\alpha(j)\beta(j)| \leq \left(\sum_{j=1}^N |\alpha(j)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{j=1}^N |\beta(j)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\alpha(j)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\beta(j)|^2\right)^{\frac{1}{2}} < +\infty$$

Dunque $\sum_{j=1}^{\infty} \alpha(j)\beta(j)$ é assolutamente convergente e dunque definisce un prodotto scalare su l^2 , cui corrisponde la norma

$$\|\alpha\| = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\alpha(j)|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

In $C([a, b])$. La norma associata al prodotto scalare $\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx$ é

$\|f\| = \left(\int_a^b |f|^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}}$. La diseguglianza di Cauchy-Schwarz si scrive

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)dx\right| \leq \left(\int_a^b |f|^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b |g|^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

Norme che non derivano da un prodotto scalare

In \mathbf{R}^n . Se $p \geq 1$, $\|x\|_p := \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}$; $\|x\|_{\infty} := \max_j |x_j|$.

In $C([a, b])$: $\|f\|_{\infty} := \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|$.

Ortogonalitá. Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ prodotto scalare in V . Due vettori u, v si dicono tra loro ortogonali se $\langle u, v \rangle = 0$.

Se $A \subset V$, $A^{\perp} := \{v \in V : \langle v, h \rangle = 0 \quad \forall h \in A\}$. Si vede subito che A^{\perp} é sottospazio lineare.

Teorema di Pitagora. $\langle u, v \rangle = 0 \Leftrightarrow \|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$.

Infatti $\|u + v\|^2 = \langle u + v, u + v \rangle = \|u\|^2 + 2\langle u, v \rangle + \|v\|^2$.

ESERCIZI E COMPLEMENTI

1. Siano V, W spazi vettoriali (reali). Sia L biiezione lineare da V a W . Provare che anche L^{-1} é lineare. Provare poi che V ha dimensione finita se e solo se W ha dimensione finita e V e W hanno la stessa dimensione.

2. Siano $p, q > 1$ esponenti coniugati, cioè $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Allora

$$|xy| \leq \frac{|x|^p}{p} + \frac{|y|^q}{q} \quad \forall x, y \in \mathbf{R} \quad (\text{diseguaglianza di Holder in } \mathbf{R})$$

Prova. Per ogni $y \geq 0$ la funzione $x \rightarrow xy - \frac{x^p}{p}$, $x \geq 0$ é superiormente limitata e raggiunge il suo massimo in $x(y)$ tale che $y - x^{p-1} = 0$ ovvero $x(y) = y^{\frac{1}{p-1}}$ e tale massimo vale $y y^{\frac{1}{p-1}} - \frac{y^{\frac{p}{p-1}}}{p} = \frac{1}{q} y^{\frac{p}{p-1}} = \frac{y^q}{q}$. Da qui la disequaglianza di Holder in \mathbf{R} : $xy - \frac{x^p}{p} \leq \frac{y^q}{q} \quad \forall x, y \geq 0$.

3. Dato $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$, sia $\|x\|_p := \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^p \right)^{\frac{1}{p}}$. Allora

$$\left| \sum_{j=1}^n x_j y_j \right| \leq \|x\|_p \|y\|_q \quad \forall x, y \in \mathbf{R}^n \quad (\text{diseguaglianza di Holder in } \mathbf{R}^n)$$

Infatti,

$$\left| \sum_{j=1}^n \frac{x_j}{\|x\|_p} \frac{y_j}{\|y\|_q} \right| \leq \sum_{j=1}^n \frac{1}{p} \frac{|x_j|^p}{\|x\|_p^p} + \frac{1}{q} \frac{|y_j|^q}{\|y\|_q^q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

4. Analogamente,

$$\sum_{j=1}^{\infty} |x_j y_j| \leq \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |y_j|^q \right)^{\frac{1}{q}} \quad \forall x, y \in \mathbf{R}^{\infty} \quad (\text{Holder in } \mathbf{R}^{\infty})$$

Basta infatti passare al limite nella disequaglianza

$$\sum_{j=1}^n |x_j y_j| \leq \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |y_j|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

5. Infine, se $f, g \in C(I)$, I intervallo, allora

$$\int_I |fg| \leq \left(\int_I |f|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_I |g|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

Infatti,

$$\frac{|f(x)|}{\left(\int_I |f|^p \right)^{\frac{1}{p}}} \frac{|g(x)|}{\left(\int_I |g|^q \right)^{\frac{1}{q}}} \leq \frac{1}{p} \frac{|f(x)|^p}{\int_I |f|^p} + \frac{1}{q} \frac{|g(x)|^q}{\int_I |g|^q}$$

Integrando su I , troviamo appunto

$$\int_I \frac{|f(x)|}{\left(\int_I |f|^p \right)^{\frac{1}{p}}} \frac{|g(x)|}{\left(\int_I |g|^q \right)^{\frac{1}{q}}} \leq 1$$

6. **La Diseguaglianza di Minkovskii:** $\|x+y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p \quad \forall x, y \in \mathbf{R}^n.$

Segue da Holder: $\|x+y\|_p^p \leq \sum_{j=1}^n |x_j + y_j|^{p-1} |x_j| + \sum_{j=1}^n |x_j + y_j|^{p-1} |y_j| \leq$

$$\leq \left(\sum_{j=1}^n |x_j + y_j|^{q(p-1)} \right)^{\frac{1}{q}} \|x\|_p + \left(\sum_{j=1}^n |x_j + y_j|^{q(p-1)} \right)^{\frac{1}{q}} \|y\|_p$$

Infatti, essendo $q(p-1) = p$, troviamo $\|x+y\|_p = \|x+y\|_p^{p-\frac{p}{q}} \leq \|x\|_p + \|y\|_p.$

7. Alcune diseguaglianze integrali

Diseguaglianze di Hardy

$$(i) \quad \int_0^{+\infty} \left[\frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt \right]^2 \leq 4 \int_0^{+\infty} f^2 \quad \forall f \in C_0([0, +\infty))$$

$$(ii) \quad \int_0^{+\infty} \frac{f^2(x)}{x^2} dx \leq 4 \int_0^{+\infty} |f'(x)|^2 dx \quad \forall f \in C^1([0, \infty)) \quad \text{con } f(0) = 0$$

Prova di (i). Posto $F(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f$, per cui $F'(x) = \frac{f(x)}{x} - \frac{F(x)}{x}$, si ha, integrando per parti,

$$\int_0^{+\infty} F^2(x) dx = -2 \int_0^{+\infty} x F(x) F'(x) dx = -2 \int_0^{+\infty} F f - F^2$$

e quindi

$$\int_0^{+\infty} F^2 = 2 \int_0^{+\infty} Ff \leq 2 \left(\int_0^{+\infty} F^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^{+\infty} f^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Prova di (ii). Sia $\phi \in C^\infty(\mathbf{R})$ non crescente e tale che $\phi(x) = 1$ per $x \leq 0$, $\phi(x) = 0$ se $x \geq 1$. Sia $\phi_n(x) = \phi(x - n)$. Sia $g_n = f' \phi_n$. Dal TFC: $\frac{f(x)}{x} = \frac{1}{x} \int_0^x f'_n(t) dt = \frac{1}{x} \int_0^x g_n(t) dt$ se $x \leq n$ e quindi, da (i),

$$\int_0^n \frac{f^2(x)}{x^2} dx = \int_0^n \left(\frac{1}{x} \int_0^x g_n(t) dt \right)^2 \leq 4 \int_0^n |g_n(x)|^2 dx \leq 4 \int_0^{+\infty} |f'(x)|^2 dx$$

Dunque

$$\int_0^{+\infty} \frac{f^2(x)}{x^2} dx = \lim_n \int_0^n \frac{f^2(x)}{x^2} dx \leq 4 \int_0^{+\infty} |f'|^2$$

Sia ora $f \in C^1(\mathbf{R})$, $\xi \in \mathbf{R}$. Allora, usando prima il Teorema Fondamentale del calcolo e poi Cauchy-Schwartz, troviamo

$$\begin{aligned} |f(x) - f(\xi)| &= \left| \int_\xi^x f'(t) dt \right| \leq \\ &\leq \left(\int_\xi^x dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\xi^x |f'(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} = |x - \xi|^{\frac{1}{2}} \left(\int_\xi^x |f'(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \quad (*) \end{aligned}$$

In particolare, se $f(0) = 0$, preso $\xi = 0$ troviamo,

$$\frac{|f(x)|}{\sqrt{x}} \leq \left[\int_0^T |f'|^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad \forall x \in (0, T] \quad (**)$$

Diseguaglianze di Poincaré Sia $f \in C^1(\mathbf{R})$. Allora

$$\begin{aligned} (i) \quad f(0) = 0 &\Rightarrow \int_0^T f^2 \leq \frac{T^2}{2} \int_0^T |f'|^2 \quad \forall T \geq 0 \\ (ii) \quad \bar{f} := \frac{1}{b-a} \int_a^b f &\Rightarrow \int_a^b |f - \bar{f}|^2 \leq \frac{(b-a)^2}{2} \int_a^b |f'|^2 \end{aligned}$$

La (i) segue da (**) integrando su $[0, T]$.

La (ii) segue, prendendo in (*) $\xi \in [a, b]$ tale che $f(\xi) = \bar{f}$ e quindi integrando, ottenendo così $\int_a^b |f - \bar{f}|^2 \leq \int_a^b |x - \xi| dx \int_a^b |f'|^2$