AM2 2010-11: Tracce delle lezioni- II Settimana

SPAZI METRICI

Sia X un insieme. Una $\quad d : X \times X :\to [0, +\infty)$ tale che

$(i) \quad 0 \leq d(u,v), \quad \forall u, v \in \mathbf{R}^n \qquad d(u,v) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad u = v$ (**positivitá**)
$(ii) \quad d(u,v) = d(v,u) \quad \forall u, v \in \mathbf{R}^n$ (**simmetria**)
$(iii) \quad d(u,v) \leq d(u,w) + d(w,v) \quad \forall u, v, w \in \mathbf{R}^n$ (**diseguaglianza triangolare**)

si chiama **distanza o metrica** su X e (X,d) si chiama **spazio metrico** .

Metrica associata a una norma . Sia $(V, \|.\|)$ spazio normato. Allora

$$d(u,v) := \|u - v\| \qquad \text{é una metrica su } V$$

Insiemi aperti, chiusi . Sia (X,d) spazio metrico. Siano $r > 0$ e $x_0 \in X$. Scriveremo

$$B_r(x_0) := \{x \in X : \ d(x, x_0) < r\}$$

$B_r(x_0)$ é la **palla aperta di raggio** r **e centro** x_0. Se V é spazio normato, é

$$B_r(x_0) = rB_1 + x_0 := \{rx + x_0 : x \in B_1\} = B_r + x_0 = \{x + x_0 : x \in B_r\}, \quad B_r := B_r(0)$$

$O \subset X$ é **aperto** se $\forall u \in O \ \exists r > 0 : \ B_r(u) \subset O$. $F \subset X$ é **chiuso** se F' é aperto.

SUCCESSIONI CONVERGENTI in uno SPAZIO METRICO

Sia (X,d) spazio metrico. Siano $x_k, x \in X$. Allora

$$x_k \to_k x \quad \Leftrightarrow \quad d(x_k, x) \to_k 0$$

Se V é spazio normato, $\quad v_k \to_k v \quad \Leftrightarrow \quad \|v_k - v\| \to_k 0.$

In $\mathbf{R}^n$, munito della norma euclidea $\|.\|_2$: $\quad v_k \to_k v$ in $\mathbf{R}^n \Leftrightarrow \|v_k - v\|_2 \to_k 0.$
(i) Sia $u_k = (x_{k,1}, \ldots, x_{k,n})$, $u = (x_1, \ldots, x_n)$, allora

$$v_k \to_k v \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{j=1}^{n} |x_{k,j} - x_j|^2 \to_k 0 \ \Leftrightarrow \ x_{k,1} \to_k x_1, \ldots, \ x_{k,n} \to_k x_n$$

(ii) $u_k \quad$ converge $\quad \Rightarrow \quad \sup_k \ ||u_k|| \ < \ +\infty \quad$ (ma non viceversa)
(iii) $u_k \to u, v_k \to v \quad \Rightarrow \quad tu_k + sv_k \to tu + sv \qquad \forall t, s \in \mathbf{R}$

In $C([a,b])$ con $\|f\|_\infty$: $\quad f_n \to f \Leftrightarrow f_n$ converge a f uniformemente in $[a,b]$.

CONTINUITÁ

Siano (X, d) e (Y, ρ) spazi metrici, $x_0 \in A \subset X$; una $f : A \to Y$ é continua in x_0 se

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta_\epsilon > 0 : \quad d(x, x_0) \le \delta_\epsilon \ \Rightarrow \ \rho(f(x), f(x_0)) \le \epsilon$$

ovvero $\forall \epsilon > 0, \exists \delta := \delta_\epsilon : \quad f(B_\delta(x_0)) \subset B_\epsilon(f(x_0))$.
f si dice continua in A se é continua in ogni punto di A. $C(A, \mathbf{R}^n)$ indicherá la classe delle funzioni continue in A a valori in $\mathbf{R}^n$ $(C(A) := C(A, \mathbf{R}))$.

UN ESEMPIO IMPORTANTE. Sia $(V, \|.\|)$ spazio normato. Allora $x \to \|x\|$ é funzione continua.

Segue da $|\ \|x\| - \|y\|\ | \ \le \ \|x\| + \|y\| \qquad \forall x, y \in V$. Infatti, $\|x\| = \|x - y + y\| \le \|x - y\| + \|y\| \Rightarrow \|x\| - \|y\| \ \le \|x - y\|$ e, scambiando x con y, $\|y\| - \|x\| \le \|y - x\|$.

Nota. Naturalmente in V puó esistere un'altra norma, diciamo $\|.\|_1$, che non é continua in $(V, \|.\|)$. Ad esempio, la norma $\|.\|_\infty$ su $C([0, 1])$ dotato della norma integrale $\|.\|_1$ non é continua, perché, ad esempio, $\int_0^1 t^n dt \to_n 0$ ma $\sup_{t \in [0,1]} t^n = 1 \quad \forall n \in \mathbf{N}$.
Che $\|.\|_\infty$ non sia continua segue allora dalla

Proposizione 1 Sia $f : A \to Y, \quad x \in A$. Allora
(i) f é continua in $x \quad \Leftrightarrow \quad (x_n \in A, \quad x_n \to_n x \quad \Rightarrow \quad f(x_n) \to f(x))$
(ii) Se $Y = \mathbf{R}^m$ e $f = (f_1, \ldots, f_m), \quad f$ é continua in $x \ \Leftrightarrow$ le f_j sono continue in x.

La dimostrazione di (i) é come nel caso $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$.
La (ii) segue dal fatto che $f(x_n) \to f(x) \quad \Leftrightarrow \quad f_j(x_n) \to f_j(x)$ per $j = 1, \ldots, m$.

Proposizione 2

$$f \text{ é continua} \Leftrightarrow (O \in \mathcal{O} \Rightarrow f^{-1}(O) \in \mathcal{O}) \Leftrightarrow (F \quad \text{chiuso} \quad \Rightarrow \quad f^{-1}(F) \quad \text{é chiuso})$$

$\Rightarrow$: sia $x \in f^{-1}(O)$, ovvero $f(x) \in O$ e quindi $B_\epsilon(f(x)) \subset O$ per un $\epsilon > 0$. Ma, per continuitá, esiste $\delta > 0$ tale che $f(B_\delta(x)) \subset B_\epsilon(f(x)) \subset O$ e quindi $B_\delta(x) \subset f^{-1}(O)$.
$\Leftarrow$: $f^{-1}(B_\epsilon(f(x))$ aperto $\Rightarrow \exists \delta > 0$ tale che $B_\delta(x) \subset f^{-1}(B_\epsilon(f(x)) \Rightarrow f(B_\delta(x)) \subset B_\epsilon(f(x))$ che dice appunto che f é continua in x.

Proposizione 3 Siano $A \subset \mathbf{R}^n$, $f, g : A \to \mathbf{R}^m$ continue in $u \in A$. Allora
(i) $\alpha f + \beta g$ é continua in $u \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbf{R}$
(ii) se $m = 1$, fg é continua in u e, se $g(u) \neq 0$ anche $\frac{f}{g}$ é continua in u
(ii) se $f(A) \subset B$ e $\phi : B \to \mathbf{R}^p$ é continua in $f(u)$, allora $\phi \circ f$ é continua in u.

TRASFORMAZIONI LINEARI CONTINUE.

Siano $(E_i, \|.\|_i), i = 1, 2$ spazi normati, $L : E_1 \to E_2$ lineare. Allora:

(i) L é continua in $E_1 \quad \Leftrightarrow \quad L$ é continua in zero.
(ii) L é continua $\quad \Leftrightarrow \quad \exists\, c = c_L$ tale che $\|Lx\|_2 \le c\|x\|_1 \quad \forall x \in E_1$

Prova di $\Leftarrow$ in (i). Da L é continua in zero, segue che

$$u_n \to u \quad \Rightarrow \quad u_n - u \to 0 \quad \Rightarrow \quad Lu_n - Lu = L(u_n - u) \to 0$$

Prova di $\Rightarrow$ in (ii). Dalla continuitá di L in 0 segue che $\exists c > 0 : \quad \|u\|_1 \le \frac{1}{c} \quad \Rightarrow$ $\|Lu\|_2 \le 1$ e quindi

$$\|L(\frac{u}{c\|u\|_1})\|_2 \le 1 \Rightarrow \|Lu\|_2 \le c\|u\|_1$$

Lo spazio $\mathcal{L}(E_1, E_2)$.

L'insieme delle trasformazioni lineari L tra due spazi lineari E_1 e E_2, dotato delle operazioni

$$(L_1 + L_2)(x) := L_1x + L_2x, \qquad (tL)(x) := tL(x)$$

é chiaramente lineare. Siccome, poi, la combinazione lineare di funzioni continue é anch'essa continua, l'insieme $\mathcal{L}(E_1, E_2)$ delle trasformazioni lineari continue é spazio vettoriale. La funzione su $\mathcal{L}(E_1, E_2)$ definita come

$$\|L\| := \sup_{x \ne 0} \frac{\|Lx\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\| \le 1} \|Lx\|, \qquad L \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$$

é, come é facile verificare, una norma su $\mathcal{L}(E_1, E_2)$.

NOTA **Non tutte le trasformazioni lineari sono continue.**

Se, ad esempio, $E_1 = E_2 = C([0, 1])$ e $\|f\|_1 = \int_0^1 |f|, \quad \|f\|_2 = \|f\|_\infty$, allora $Lf := f$, ovviamente lineare, non é continua: se $f_n(t) = t^n$, allora $\|f_n\|_1 \to 0$ mentre $\|f_n\|_\infty \equiv 1$.
Un altro esempio. $Lf = f'$, $f \in C_0^\infty(\mathbf{R})$ dotato della norma $\|f\|_\infty := \sup_{\mathbf{R}} |f(t)|$.
Infatti, data $f \in C_0^\infty, \quad f \ne 0$ e, posto $f_n(t) := f(nt)$, é

$$\|f_n\|_\infty \equiv \|f\|_\infty, \qquad \|Lf_n\|_\infty = \|nf'\|_\infty = n \sup_{\mathbf{R}} |f'(t)| \to_n \infty$$

Tuttavia

Ogni $l : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ lineare é continua, ogni $L : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ lineare é continua

Per provarlo, supponiamo $\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m$ dotati della norma euclidea (ma, come vedremo, la cosa vale quali che siano le norme). Intanto,

$$\exists a \in \mathbf{R}^n : \quad l(x) =< a, x > \quad \forall x \in \mathbf{R}^n$$

e quindi la continuitá di l segue da Cauchy-Schwartz: $|l(x)| \leq \|a\| \, \|x\|$.

La continuitá di L segue dal fatto che , se e_j, f_i sono basi canoniche in $\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m$, allora L si scrive

$$L(x) = L(\sum_{j=1}^n x_j e_j) = \sum_{j=1}^n x_j L(e_j) = \sum_{j=1}^n x_j [\sum_{i=1}^m a_{ij} f_i] = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right) f_i$$

per certi a_{ij}, cioé le componenti di L sono forme lineari , quindi continue. Ne deriva che L é continua.

ALTRI ESEMPI:

(i) i polinomi in $x_1, \ldots, x_n$, $exp(x_1^2 + \ldots + x_n^2), \sin(x_1 \ldots x_n)$, sono funzioni continue.

(ii) Sia $\quad f(x,y) := \frac{xy^n}{(x^2+y^2)^2} \quad$ se $x^2 + y^2 \neq 0, \quad f(0,0) = 0$
Se $n \geq 4$, f é continua in $(0,0)$: $\quad |2xy| \leq x^2 + y^2 \Rightarrow |\frac{xy^n}{(x^2+y^2)^2}| \leq \frac{y^2|y|^{n-3}}{x^2+y^2} \leq |y|^{n-3}$
Se $n = 3$, f é discontinua in $(0,0)$ perché $f(x, mx) = \frac{m^3}{(1+m^2)^2} \quad \forall x \neq 0$.
Se $n = 1, 2$, da $\quad f(x, mx) = \frac{m^3}{x^{3-n}(1+m^2)^2} \quad$ segue che $\quad f$ non é limitata attorno a $(0,0)$, $\quad$ e quindi non é continua in $(0,0)$ perché $\qquad g$ continua in $u \quad \Rightarrow$

$$\exists \delta > 0 : \quad \|g(v)\| \leq \|g(v) - g(u)\| + \|g(u)\| \leq 1 + \|g(u)\| \quad \text{se} \quad \|v - u\| \leq \delta.$$

Notiamo che, fissato y, $x \to f(x,y)$ é continua, e lo é anche $y \to f(x,y)$ per ogni fissato x, e ció quale che sia $n \in \mathbf{N}$. La 'continuitá in x ed y' é quindi una proprietá molto piú debole della 'continuitá nel complesso delle variabili'.

(iii) Sia $f(x,y) = xy \log(x^{2n} + y^{2m})$, $f(0,0) = 0$. Proviamo che f é continua (anche) in $(0,0)$. Possiamo supporre $|x| + |y| \leq 1$ e $n \geq m$. Da $|xy|^n \leq \frac{1}{2}(|x|^{2n} + |y|^{2n})$ segue $|xy \log(x^{2n} + y^{2m})| \leq (|x|^{2n} + |y|^{2m})^{\frac{1}{n}} \log(x^{2n} + y^{2m})| \leq \epsilon$ se $(x^{2n} + y^{2m}) \leq \delta$ per un $\delta = \delta_\epsilon$ opportuno, perché $t^{\frac{1}{n}} \log t \to 0$ al tendere di t a 0^+.

COMPLEMENTI E ESERCIZI

Sia (X, d) spazio metrico.

1. La palla 'aperta' $B_r(x_0) := \{x : \quad d(x, x_0) < r\}$ é un insieme aperto.

Infatti, se $x \in B_r(x_0)$, $\delta := d(x, x_0)$, allora

$$d(y, x) < r - \delta \ \Rightarrow d(y, x_0) \leq d(y, x) + d(x, x_0) < r - \delta + \delta = r$$

2. La palla 'chiusa' $\overline{B_r(x_0)} := \{x : \quad d(x, x_0) \leq r\}$ é un insieme chiuso.

Infatti $\overline{B_r(x_0)}^c = \{x : \quad d(x, x_0) > r\}$ é un insieme aperto.

3. Dato $A \subset X$, un $x \in X$ é

interno ad A se $\exists r > 0$ tale che $B_r(x) \subset A$
esterno ad A se $\exists r > 0$ tale che $B_r(x) \subset A^c$ ($A^c = A'$ é il complementare di A).
punto frontiera se non é né interno né esterno ad A.

Dunque, un insieme A é aperto se i suoi punti sono tutti punti interni, mentre ∂A, la frontiera di A, si caratterizza come

$$\partial A := \{x : B_r(x) \cap A \neq \emptyset \neq B_r(x) \cap A\}$$

4. Se $f \in C(X, \mathbf{R})$ allora $\{x : \ f(x) < c\}$ é aperto per ogni $c \in \mathbf{R}$.

Infatti, se $f(x) < c$ e $f(x)+\epsilon < c$, e se δ é tale che $d(x, y) < \delta \Rightarrow |f(y)-f(x)| < \epsilon$, allora $f(y) = f(y) - f(x) + f(x) < \epsilon + c - \epsilon = c$.
Od anche: é aperto perché preimmagine di un aperto.

5. Siano $\mathcal{O}, \mathcal{F}$ la famiglia degli aperti, risp. dei chiusi, di X. Provare che

(i) $O_\alpha \in \mathcal{O} \quad \alpha \in \mathcal{A}$, $\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A}$ finito $\quad \Rightarrow \quad \bigcup\limits_{\alpha \in \mathcal{A}} O_\alpha \in \mathcal{O} \quad$ e $\quad \bigcap\limits_{\alpha \in \mathcal{A}_0} O_\alpha \in \mathcal{O}$

(ii) $\quad F_\alpha \in \mathcal{F}$ i, $\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A}$ finito $\quad \Rightarrow \quad \bigcap\limits_{\alpha \in \mathcal{A}} F_\alpha \quad$ e $\quad \bigcup\limits_{\alpha \in \mathcal{A}_0} F_\alpha \quad$ sono chiusi

Prova di (ii). $\left(\bigcap\limits_{\alpha \in \mathcal{A}} F_\alpha\right)' = \bigcup\limits_{\alpha \in \mathcal{A}} F'_\alpha \in \mathcal{O} \quad$ e $\quad \left(\bigcup\limits_{\alpha \in \mathcal{A}_0} F_\alpha\right)' = \bigcap\limits_{\alpha \in \mathcal{A}_0} F'_\alpha \in \mathcal{O}$

In particolare, se $\mathcal{F}_A$ indica la classe dei chiusi contenenti A, posto $\overline{A} : \bigcap\limits_{F \in \mathcal{F}_A} F$, allora $\overline{A}$ é chiuso, ed é quindi il piú piccolo chiuso contenente A ($\overline{A}$ é la **chiusura** di A).