

Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

# Tutorato di AM110

13 Dicembre 2011

A.A. 2011-2012 - Docente: Prof. Ugo Bessi

Tutore: Filippo M. Bonci

TUTORATO 11

Il 13 Dicembre 1974 Malta diventa una repubblica

1. Sia  $(\mathfrak{X}, d)$  uno spazio metrico con distanza:

$$d(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \neq y \\ 0 & \text{se } x = y \end{cases}$$

Dato  $\mathfrak{C} \subseteq \mathfrak{X}$ , dimostrare che  $\overline{\mathfrak{C}} = \mathfrak{C}$

2. Sia  $(\mathfrak{X}, d)$  uno spazio metrico. Definiamo su  $\mathfrak{X} \times \mathfrak{X}$  la distanza:

$$D[(x_1, y_1), (x_2, y_2)] = d(x_1, x_2) + d(y_1, y_2)$$

Dimostrare che la mappa:

$$f : (\mathfrak{X} \times \mathfrak{X}, D) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \longrightarrow d(x, y)$$

è continua.

3. Sia  $(X, d)$  uno spazio metrico tale che  $A, B \subseteq X$  e tale che  $\overline{A} \cap \overline{B} = \emptyset$ . Allora esistono due aperti disgiunti  $V_A$  e  $V_B$  con  $V_A \supseteq V_B$  e  $V_B \supseteq B$

4. Usando gli sviluppi calcolare:

(a)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\log(1-x))}{\sin(x)}$$

(b)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\operatorname{tg}(x)}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}}$$

(c)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\alpha x} - \sqrt{1+x}}{\operatorname{tg}(x)}$$

(d)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(x) - \sin(x)}{x^3}$$

(e)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi \cos(x))}{x^2}$$