Universitá degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di AM110

6 Dicembre 2011

A.A. 2011-2012 - Docente: Prof. Ugo Bessi

Tutore: Filippo M. Bonci

Tutorato 10

Il 6 Dicembre 1917 la Finlandia dichiara l'indipendenza dalla Russia

1. Siano $0 < \alpha < \beta < +\infty$. Dimostrare che per qualche $k > 0$ si ha:

$$\bigcup_{k \geq 1} (k\alpha, k\beta) \supseteq [K, +\infty)$$

Suggerimento: Dimostrare che per k grande si ha: $(n-1)\beta > n\alpha$

   (a) Sia $\mathfrak{G} \subseteq (0, +\infty)$ un aperto illimitato. Si ponga allora:

$$\mathfrak{D} = \{x : x \in (0, +\infty) : kx \in \mathfrak{G} \quad infinite \quad volte\}$$

   Si dimostri che:

$$\mathfrak{D} = \bigcap_{k \geq 1} \bigcup_{n \geq k} \{x \in (0, +\infty) : nx \in \mathfrak{G}\}$$

   (b) Usando il punto precedente dimostrare che $\mathfrak{D}$ è una intersezione numerabile di aperti.

2. Sia $f \in C([0, +\infty), \mathbb{R})$ e si ponga:

$$g(x) = sup_{x \in [0,x)} |f(x)|$$

Dimostrare che:

   (a) $g(x)$ è continua.

   (b) Se $f(x)$ è uniformemente continua allora $g(x)$ é uniformemente continua.

   (c) Se $f(x)$ é monotona crescente e non negativa allora $f(x) = g(x)$ per ogni x.

3. Un punto p in uno spazio metrico $\mathfrak{X}$ é detto di *condensazione* per un insieme $\mathfrak{E}$ se ogni palla $\mathfrak{B}(p, \epsilon)$ contiene non numerabili punti di $\mathfrak{E}$. Siano ora $\mathfrak{A} \subseteq \mathbb{R}$ un insieme non numerabile e $\mathfrak{P}$ l'insieme dei punti di condensazione di $\mathfrak{A}$.

   (a) Si consideri l'insieme delle palle $\left(q - \frac{1}{n}, q + \frac{1}{n}\right) = \mathfrak{B}\left(q, \frac{1}{n}\right)$ al variare di $q \in \mathbb{Q}$ e $n \in \mathbb{N}$. Dimostrare che tale insieme è numerabile.

   (b) Dimostrare che ogni aperto di $\mathbb{R}$ è unione di palle di cui sopra.

(c) Si definisca

$$\mathfrak{W} = \bigcup_{n \geq 1} \left\{ \mathfrak{B}\left(q, \frac{1}{n}\right) : q \in \mathbb{Q}, n \in \mathbb{N} \quad \mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}\left(q, \frac{1}{n}\right) \leq \sharp\mathbb{N} \right\}$$

Dimostrare allora che $\mathfrak{P} = \mathfrak{W}^c$

(d) Usando il punto sopra dimostrare che $\mathfrak{P}$ è chiuso e che ogni punto di $\mathfrak{P}$ è di accumulazione per $\mathfrak{P}$.

Suggerimento: Se $\mathfrak{P}$ avesse un punto isolato in x allora si avrebbe: $(\mathfrak{B}(x, \epsilon) \setminus \{x\}) \subseteq \mathfrak{W}$

4. Siano $A_1, A_2, ...$ dei sottoinsiemi di uno spazio metrico $\mathfrak{X}$.

   (a) Se $\Gamma_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ dimostrare che $\overline{\Gamma_n} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{A_i}$

   (b) Se $\Gamma_n = \bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i$ dimostrare che $\overline{\Gamma} \supseteq \bigcup_{i=1}^{n} \overline{A_i}$

5. Dare un esempio di un ricoprimento aperto di $(0, 1)$ che non ammetta sottoricoprimenti finiti.

6. Sia $\mathfrak{E}$ l'insieme dei numeri reali di $[0, 1]$ la cui esapansione decimale contiene solo 4 e 7. Dimostrare che E non è numerabile.