

Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

# Tutorato di AM110

25 Ottobre 2011

A.A. 2011-2012 - Docente: Prof. Ugo Bessi

Tutori: Filippo M. Bonci

TUTORATO 5

Il 25 Ottobre 2011 la Microsoft rilascia Windows XP

1. Si supponga che  $a_n \geq 0$  e che la serie:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$$

converga. Dimostrare allora che le seguenti serie sono convergenti:

(a)  $\sum_{n \geq 0} a_n x^n \quad x \in [0, 1]$

(b)  $\sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{n}$

(c)  $\sum_{n \geq 1} \sqrt[n]{n} a_n$

2. Studiare la convergenza della seguente serie:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{n}$$

dove  $x \in \mathbb{R}$

*Suggerimento:* utilizzare la formula di prostaferesi per il seno:  $\sin(n + \frac{1}{2})x - \sin(n - \frac{1}{2})x = 2\sin(\frac{x}{2})\cos(nx)$  e, infine, utilizzare il criterio di Abel

3. Trovare la parte immaginari e la parte reale dei seguenti numeri complessi:

(a)  $(x + iy)^2$

(b)  $(x + iy)^3$

(c)  $(1 + i\sqrt{2})^6$

(d)  $\frac{(1+i)^3}{1-i}$

(e)  $\frac{2+3i}{2-i} + 4i$

(f)  $\frac{1}{2i}(i^5 - i^{-5})$

4. Calcolare il modulo e l'argomento di:

(a)  $(i - \sqrt{3})^{14}$

(b)  $\frac{1+\cos(\theta)-i\sin(\theta)}{1+\cos(\theta)+i\sin(\theta)}$

*Suggerimento:* utilizzare la formula di Eulero

5. Calcolare le varie determinazioni di:

(a)  $\sqrt[8]{-1}$

(b)  $\sqrt[3]{1+i}$

(c)  $\sqrt[5]{\sqrt{3}-i}$

6. Trovare, se esistono, i numeri complessi  $z$  che soddisfano:

$$\begin{cases} z^2\bar{z} - \bar{z}z = -\bar{z} \\ (z^3 + \bar{z})^3 = 1 \end{cases}$$

7. Dimostrare che la somma delle  $n$  radici dell'equazione  $z^n = 1$  é zero per ogni  $n \geq 2$