

Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di AM110

4 Ottobre 2011

A.A. 2011-2012 - Docente: Prof. Ugo Bessi

Tutore: Filippo M. Bonci

TUTORATO 2

Il 4 Ottobre 1910 il Portogallo diventa una Repubblica

1. Calcolare il *liminf* e il *limsup* delle seguenti successioni:

- (a) $a_n = \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$
- (b) $a_n = n(1 + (-1)^n)$
- (c) $a_n = (-1)^n \sqrt[n]{n}$
- (d) $a_n = n^{1+(-1)^n}$

2. Studiare la convergenza delle successioni seguenti, definite per induzione:

$$a_1 = \sqrt{2} \quad a_{n+1} = \sqrt{2a_n}$$

dove si ha che $a_1 < 2$ e, per induzione, $a_n < 2$

3. Sia $\{a_n\}$ la successione di Fibonacci definita da:

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_1 = 1 \\ a_{n+2} = a_n + a_{n+1} \end{cases}$$

dimostrare per induzione che:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$$

4. Si consideri l'equazione alle differenze:

$$\begin{cases} a_0 = A \\ a_1 = B \\ a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n \end{cases}$$

si verifichi che è risolta da:

$$a_n = \alpha 2^n + \beta n 2^n$$

per opportuni α e β che dipendono da A e B

5. Dimostrare che le seguenti applicazioni sono delle distanze:

(a) $d_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tale che:

$$d_1[(x_1, x_2); (y_1, y_2)] = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}$$

(b) $d_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tale che:

$$d_2[(x_1, x_2); (y_1, y_2)] = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$$

Disegnare, infine, $B(0, 1)$ per entrambi le distanze