Universitá degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di AM110

27 Settembre 2011

A.A. 2011-2012 - Docente: Prof. Ugo Bessi

Tutore: Filippo M. Bonci

Tutorato 1

Il 27 Settembre 1998 nasce il motore di ricerca Google

1. Dimostrare che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, il numero reale $\sqrt{n}$ é necessariamente o un numero intero oppure un numero irrazionale.

   Suggerimento: ragionare per assurdo come nel caso di $\sqrt{2}$ visto a lezione.

2. Dimostrare che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, $\sqrt{4n-1}$ é un numero irrazionale.

   Suggerimento: Considerare l'equazione $a^2 = 4n - 1$ nei due casi: a pari e a dispari.

3. Sia $x \in \mathbb{R}$ un dato numero fissato; dimostrare che se $x^{12} \in \mathbb{Q}$ e $x^7 \in \mathbb{Q}$ allora $x \in \mathbb{Q}$.

   Suggerimento: Dimostrare prima che x^5 è razionale ($5 = 12 - 7$); poi che x^2 è razionale $(2 = 7 - 5)$ e cercare di raggiungere 1.

4. Determinare *Sup* e *Inf* dei seguenti insiemi e specificare se essi sono massimi o minimi:

   (a)
   $$\left\{ \left| \frac{5-n}{n+3} \right| : \quad n \in \mathbb{N} \right\}$$

   (b)
   $$\left\{ \frac{(-1)^n}{1+n^2} : \quad n \in \mathbb{N} \right\}$$

   (c)
   $$\left\{ \frac{1}{1+x^2} : \quad x \in \mathbb{R} \right\}$$

5. Siano $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tali che $\alpha > 0$ e $\beta > 0$. Dimostrare che:

   $$\frac{2\alpha\beta}{\alpha+\beta} \leq \sqrt{\alpha\beta} \leq \frac{\alpha+\beta}{2}$$

   (a) Utilizzando la relazione sopra dimostrare che tra tutti i rettangoli di perimetro fissato, il quadrato ha area massima.

   (b) Utilizzando la relazione sopra dimostrare che tra tutti i rettangoli di area fissata, il quadrato ha perimetrimo minimo.

6. Dimostrare che l'insieme $A = \left\{ x \in \mathbb{Q} : x^3 < 2 \right\}$ non ammette estremo superiore in $\mathbb{Q}$