Tutorato di Statistica 1 del 13/05/2009
Docente: Prof.ssa Enza Orlandi
Tutore: Dott.ssa Barbara De Cicco

Esercizio 1.
É data la distribuzione di Bernoulli X, dove
$P(X=1)=\theta=1-P(X=0)$ e l'ampiezza del campione $n=10$; la funzione di potenza data da:
$\Pi_Y(\theta)=P_\theta(H_0\ sia\ rifiutata|H_0 vera)=P_\theta(\sum_{i=1}^{6}\geq 6)=\sum_{j=6}^{10}\binom{10}{j}\theta^j(1-\theta)^{10-j}$ con $\theta\in(0,1)$
L'ampiezza del test data da: $sup_{\theta\leq 1/2}(\Pi_Y(\theta))=sup_{\theta\leq 1/2}\sum_{j=6}^{10}\binom{10}{j}\theta^j(1-\theta)^{10-j}=$
dallo studio della derivata prima di $\Pi_Y(\theta)$ si vede che la funzione crescente sotto l'ipotesi H_0 per $\theta\leq\frac{1}{2}$ nel caso in cui $\frac{6}{10}>\theta$ allora
$=\sum_{j=6}^{10}\binom{10}{j}\frac{1}{2^{10}}$
Il test pi potente dato $n=10$ ed $\alpha=0.0547$ si trova applicando il lemma di Neyman-Pearson (teorema 9.2):
$\lambda(x_1,..,x_{10})=\frac{L(\theta_0)}{L(\theta_1)}\geq k$ allora

$\frac{\prod_{i=1}^{10}\theta_0^{x_i}(1-\theta_0)^{1-x_i}1_{(0,1)}(x_i)}{\prod_{i=1}^{10}\theta_1^{x_i}(1-\theta_1)^{1-x_i}1_{(0,1)}(x_i)}=\frac{[\frac{1}{2}]^{10}}{[\frac{1}{4}]^{\sum_i^{10}x_i}[\frac{3}{4}]^{10-\sum_i^{10}x_i}}\leq k$

quindi $(\frac{1}{2})^{10}\leq k(\frac{1}{4})^{\sum_i^{10}x_i}(\frac{3}{4})^{10-\sum_i^{10}x_i}$
passando al log:
$(log1/4+log4/3)\sum_{i=1}^{10}\geq -logk-10log3/4+10log1/2$ quindi
$\sum_{i=1}^{10}x_1\leq k'$
allora l'ampiezza del test :
$0.0547=\alpha=P(rifiutare\ H_0|H_0)=P(\sum_{i=1}^{10}x_i\leq k')$
dove k' il qualtile della $Bin(10,\frac{1}{2})$

Esercizio 2.
Sia $n=1$ e X_1 v.c. da

$$f(x,\theta)=\theta x^{\theta-1}1_{(0,1)}(x)$$

Il test pi potente dato da:

$$\lambda(x_1,..,x_{10})=\frac{L(\theta_0)}{L(\theta_1)}\leq k^*$$

$\lambda(x_1)=\frac{\theta_0x_1^{\theta_0-1}1_{(0,1)}x_1}{\theta_1x_1^{\theta_1-1}1_{(0,1)}x_1}=\frac{\theta_0}{\theta_1}x_1^{\theta_0-\theta_1}=\frac{3}{2}x_1\leq k*$ da cui $x_1\leq\frac{2}{3}k^*$.
Allora il test pi potente : si rifiuti $H_0\iff x\leq\frac{2}{3}k^*$, quindi la regione critica : $C^*=\{x:x\leq\frac{2}{3}k^*\}$

$$0.05=\alpha=P(rifiuto\ H_0|H_0)=P(x\leq\frac{2}{3}k^*)=\int_0^{\frac{2}{3}k^*}\theta_0x^{\theta_0-1}dx=$$

$$=\int_0^{\frac{2}{3}k^*}3x^2dx=\left(\frac{2}{3}k^*\right)^3$$

da cui si ricava che $k^*=0.55<1$

Esercizio 3.
Sia $X_1, ..., X_n$ un c.c. estratto da Poisson di parametro λ.

$$f(x,\theta) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} 1_{(0,1,2..)}(x)$$

Il test pi potente di ampiezza α é : $\lambda(x_1, x_2, ..) = \frac{L(\theta_0)}{L(\theta_1)} \leq k^*$
$\lambda(x_1, x_2, ..) = \frac{\prod_{i=1}^n \lambda_0^{x_i} e^{-\lambda_0} \frac{1}{x_i!} 1_{(0,1,..)}(x_i)}{\prod_{i=1}^n \lambda_1^{x_i} e^{-\lambda_1} \frac{1}{x_i!} 1_{(0,1,..)}(x_i)} = \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_1}\right)^{\sum_{i=1}^n x_i} e^{-n(\lambda_0 - \lambda_1)} \leq k^*$
passando al log otteniamo:

$$log\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_1}\right) \sum_{i=1}^n x_i \leq logk^* + n(\lambda_0 - \lambda_1)$$

$$\sum_{i=1}^n x_i \geq \frac{logk^* + nlog(\lambda_0 - \lambda_1)}{log\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_1}\right)}$$

da cui $\sum_{i=1}^n x_i \geq k'$.
Allora la regione critica per $\lambda_0 \leq \lambda_1$: $C^* = \{x_1, x_2, .. : \sum_{i=1}^n x_i \geq k'\}$
Il test pi potente di ampiezza α : si rifiuti $H_0 \iff \sum_{i=1}^n \geq k'$

$$\alpha = P(rifiutoH_0) = P(\sum_{i=1}^n x_i \geq k') = 1 - P(\sum_{i=1}^n x_i \leq k')$$

poich $\forall i, X_i \sim Po(\lambda_0)$ allora $\sum_{i=1}^n x_i \sim Po(n\lambda_0)$ quindi k' il quantile della $Po(n\lambda_0)$ di livello $1 - \alpha$.
Nel caso in cui $\lambda_0 > \lambda_1$ si procede in maniera analoga sempre applicando il lemma di Neyman-Pearson, il test diventer: si rifiuti $H_0 \iff \sum_{i=1}^n < k'$ quindi
$\alpha = P(\sum_{i=1}^n < k')$ dove k' il quantile della $Po(n\lambda_0)$ di livello α