Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2008/2009

GE4 - Geometria differenziale 1

Esercizi - Alvin (19-12-2008)

<u>Esercizio 1.</u> Sia $\mathcal{C}$ il cilindro $\mathcal{C} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\}$. Considerata l'applicazione

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathcal{C} \subset \mathbb{R}^3 = \mathbb{C} \times \mathbb{R} \\ (u, v) &\longmapsto (e^{iu}, v) \end{aligned}$$

mostrare che
(1.1) φ è un'isometria locale.
(1.2) φ non è un'isometria globale.
(1.3) Se $U := (-\pi, \pi) \times \mathbb{R}$ allora $\varphi_{|U}$ è un'isometria globale sull'immagine.
(1.4) Non esiste una congruenza tra $\mathcal{C}$ e U.

<u>Esercizio 2.</u> Considerato $\mathbb{R}^3$ come spazio vettoriale Euclideo con prodotto scalare standard, mostrare che un'applicazione lineare è conforme se e solo se conserva gli angoli.

<u>Esercizio 3.</u> Calcolare *geometricamente* la seconda forma fondamentale dell'iperboloide iperbolico $\Sigma := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 = x^2 + y^2 - 1\}$ nel punto $(1, 0, 0)$. Mostrare inoltre che il minimo della seconda forma quadratica si ha per il piano $\{z = 0\}$ e il massimo per il piano $\{y = 0\}$. Determinare infine le direzioni asintotiche.

<u>Esercizio 4.</u> (Do Carmo, pag. 230 es. 16) Sia $X : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, con

$$\begin{aligned} U &= \{(\theta, \varphi) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 0 < \theta < \pi, \, 0 < \varphi < 2\pi\}, \\ X(\theta, \varphi) &= (\sin\theta\cos\varphi, \, \sin\theta\sin\varphi, \, \cos\theta) \end{aligned}$$

una parametrizzazione della sfera unitaria S^2. Sia

$$\log \operatorname{tg}\frac{\theta}{2} = \mathrm{u}, \qquad \varphi = \mathrm{v}.$$

Mostrare che una parametrizzazione dell'insieme $X(U) = V$ è data da

$$Y(u, v) = (\mathrm{sech\,u\cos v}, \, \mathrm{sech\,u\sin v}, \, \mathrm{tgh\,u})$$

e calcolare la prima forma fondamentale in queste nuove coordinate. Osservare quindi che Y^{-1} è un'applicazione conforme che manda meridiani e paralleli di S^2 in rette del piano, detta "Proiezione di Mercatore". Per l'esercizio 2 conserva gli angoli (ma NON le distanze) e quindi può essere usata per tracciare le rotte degli aerei.

<u>Esercizio 5.</u> Sappiamo (cfr. Do Carmo pag 237, es 1) che se X è una carta locale tale che la sua prima forma fondamentale è diagonale, allora si ha %

$$K = -\frac{1}{2\sqrt{EG}}\left(\left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}}\right)_v + \left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}}\right)_u\right).$$

(5.1) Mostrare che non esistono superfici $X(u,v)$ tali che $E = G = 1$, $F = 0$ e $e = 1$, $g = -1$, $f = 0$.
(5.2) Esiste una superficie $X(u,v)$ con $E = 1$, $F = 0$, $G = \cos^2 u$ e $e = \cos^2 u$, $f = 0$, $g = 1$?

<u>Esercizio 6.</u> Sia $\gamma(v) = (\varphi(v), \psi(v)) = (e^{-v}, \int_0^v \sqrt{1 - e^{-2t}}dt), v \geq 0$ la curva cosiddetta "*trattrice*". La superficie di rotazione ottenuta ruotando la trattrice, posta nel piano xz, attorno all'asse z è detta "*pseudosfera*". Utilizzando la formula che da la curvatura di Gauss per superfici di rotazione (Do Carmo p. 162), verificare che la pseudosfera ha curvatura di Gauss costante $K = -1$.