Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2008/2009

GE4 - Geometria differenziale 1

ESERCIZI - ALVIN (29-09-2008)

<u>ESERCIZIO 1.</u> Sia $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva parametrizzata, con $\dot{\alpha} \neq 0$ $\forall t \in I$. Mostrare che $|\alpha(t)|$ è una costante non nulla (i.e. α giace su una sfera) se e solo se $\alpha(t)$ è ortogonale ad $\dot{\alpha}(t)$ $\forall t \in I$.

<u>ESERCIZIO 2.</u> Mostrare che l'insieme $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y = |x|\}$
(2.1) è la traccia di una curva regolare a tratti non liscia.
(2.2) è la traccia di una curva liscia.
(2.3) non può essere la traccia di una curva regolare.

<u>ESERCIZIO 3.</u> (Do Carmo, p.7 es.3) Sia $OA = 2a$ il diametro di un cerchio S^1 e OY e AV le tangenti a S^1 in O e A rispettivamente. Una semiretta r è tracciata da O intersecando S^1 in C e la retta AV in B. Su OB sia $Op = CB$. Ruotando r intorno a O, il punto p descrive una curva chiamata *cissoide di Diocle*. Scegliendo OA come asse x e OY come asse y mostrare che:
(3.1) La traccia di

$$\alpha(t) = \left(\frac{2at^2}{1+t^2}, \frac{2at^3}{1+t^2} \right), \quad t \in \mathbb{R}$$

coincide con la cissoide di Diocle. [*Suggerimento.* Porre $t = \tan\theta$.]
(3.2) L'origine $(0, 0)$ è un punto singolare della cissoide.
(3.3) Al tendere di $t \to \infty$, $\alpha(t)$ si avvicina alla retta $x = 2a$ e $\dot{\alpha}(t) \to (0, 2a)$, i.e. la retta $x = 2a$ è un asintoto della cissoide.

<u>ESERCIZIO 4.</u> (Do Carmo, p.7 es.4) Sia $\alpha : (0, \pi) \to \mathbb{R}^2$ data da

$$\alpha(t) = \left(\sin t, \cos t + \log \tan \frac{t}{2} \right)$$

dove t è l'angolo che l'asse y forma con il vettore $\dot{\alpha}(t)$. La traccia di α è detta *trattrice*. Mostrare che:
(4.1) α è una curva differenziabile, regolare ovunque tranne che in $t = \pi/2$
(4.2) La lunghezza del segmento sulla tangente alla trattrice tra il punto di tangenza e l'asse y è identicamente uguale a 1.

<u>ESERCIZIO 5.</u> (Do Carmo, p.8 es.6) Sia $\alpha(t) = (ae^{bt} \cos t, ae^{bt} \sin t)$, $t \in \mathbb{R}$, con $a > 0$, $b < 0$ costanti, una curva parametrizzata. Mostrare che:
(5.1) Al tendere di $t \to \infty$, la curva $\alpha(t)$ si avvicina all'origine seguendo una spirale (per questo la traccia di α è detta *spirale logaritmica*).
(5.2) Al tendere di $t \to \infty$ si ha $\dot{\alpha}(t) \to (0, 0)$, e inoltre α ha ascissa curvilinea finita in $[t_0, \infty)$, i.e.

$$\lim_{t\to\infty} \int_{t_0}^{t} |\dot{\alpha}(t)| dt < \infty$$

<u>ESERCIZIO 6.</u> Sia k il vettore $(0, 0, 1) \in \mathbb{R}^3$ e sia $\alpha(t) : I \to \mathbb{R}^3$ una curva (diversa da un punto). Dimostrare che $\alpha(t)$ è contenuta in un piano affine orizzontale π (cioè $z = z_0$) se e solo se il prodotto

scalare $\alpha \cdot k$ è costante (cioè non dipende da t).

<u>Esercizio 7.</u> Nello spazio Euclideo $\mathbb{R}^3$ con base ortonormale $\{i, j, k\}$ il prodotto vettoriale $\wedge : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ è definito estendendo per bilinearità le seguenti relazione "quaternioniche":

$$i \wedge i = j \wedge j = k \wedge k = 0$$

$$i \wedge j = -j \wedge i = k, \qquad j \wedge k = -k \wedge j = i, \qquad k \wedge i = -i \wedge k = j$$

Il *prodotto misto* $(u \wedge v) \cdot w$ di tre vettori $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ è il numero reale che si ottiene facendo il prodotto scalare del terzo con il prodotto vettoriale dei primi due. Mostrare che
(7.1) $(u \wedge v) \cdot w$ è uguale al determinante della matrice 3×3 delle coordinate dei tre vettori u, v, w.
(7.2) $(u \wedge v) \cdot w$ è uguale al volume con segno del parallelepipedo generato dai tre vettori u, v, w. Fornire un'interpretazione geometrica di questo segno.

<u>Esercizio 8.</u> Dimostrare che il prodotto vettoriale in $\mathbb{R}^3$ non è associativo.

<u>Esercizio 9.</u> Siano

$$u(t) = (u_1(t), u_2(t), u_3(t)),$$
$$w(t) = (w_1(t), w_2(t), w_3(t)),$$

due campi vettoriali lisci $u, w : I \to \mathbb{R}^3$. Dimostrare che $u \cdot w : I \to \mathbb{R}$ è una funzione liscia e che $u \wedge w : I \to \mathbb{R}^3$ è un campo vettoriale liscio. Mostrare inoltre che vale la regola di Leibniz:

$$\frac{d}{dt}(u(t) \cdot w(t)) = \dot{u}(t) \cdot w(t) + u(t) \cdot \dot{w}(t),$$
$$\frac{d}{dt}(u(t) \wedge w(t)) = \dot{u}(t) \wedge w(t) + u(t) \wedge \dot{w}(t).$$

<u>Esercizio 10.</u> Sia $v = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ un vettore fissato e sia $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva liscia, dove $I = (0, 1)$. Usare il Primo Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale per dimostrare che

$$\int_0^1 dt v \cdot \dot{\alpha}(t) = v \cdot (\alpha(1) - \alpha(0)).$$

<u>Esercizio 11.</u> Dire quali tra le seguenti basi sono positivamente orientate.
(11.1) La base $\{(1, 3), (4, 2)\}$ in $\mathbb{R}^2$.
(11.2) La base $\{(1, 3, 5), (2, 3, 7), (4, 8, 3)\}$ in $\mathbb{R}^3$.

<u>Esercizio 12.</u> (Do Carmo, p.10 es.8) Sia $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva differenziabile e sia $[a, b] \subset I$ un intervallo chiuso. Per ogni partizione

$$a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$$

di $[a, b]$, si definisce

$$l(\alpha, P) = \sum_{i=1}^{n} |\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})|$$

dove P indica la partizione data. La norma $|P|$ di una partizione P è definita come

$$|P| = \max_{1 \le i \le n} |t_i - t_{i-1}|$$

Geometricamente, $l(\alpha, P)$ è la lunghezza della poligonale inscritta in $\alpha([a, b])$ con vertici in $\alpha(t_i)$. Mostrare che $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \, \delta > 0$ tale che se $|P| < \delta$, allora

$$\left| \int_a^b |\dot{\alpha}(t)| dt - l(\alpha, P) \right| < \varepsilon$$