Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

AM3 tutorato 6

A.A 2008-2009

Docente: Prof. P. Esposito

Tutori: G.Mancini, E. Padulano

Tutorato 6 dell' 8 Aprile 2009

Esercizio 1 Sia $f(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2}$. Determinare l'estremo superiore e l'estremo inferiore di f sull' insieme $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy \geq 1,\ x > 0\}$ specificando se si tratta di massimo e minimo e determinando eventualmente i punti dove sono raggiunti.

Esercizio 2 Sia $B = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2 = \sin^2 z,\ 0 \leq z < \frac{2}{3}\pi\}$ e sia $f(x,y,z) = y - x^2 + \frac{2}{3}\cos^3 z$. Calcolare $\inf_B f$ e $\sup_B f$ e stabilire se si tratta di massimo/minimo.

Esercizio 3 Sia $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definita da $F(x,y) = (e^{\sin y} - \log(1+x) + x\sqrt{1+y^2},\ 2\sin x \cos\left(\frac{\pi}{2}y\right))$

(a) Studiare l'invertibilità locale attorno al punto $(0,0)$ della funzione F e fornire un esempio di intorno del punto $F(0,0)$ in cui è definita la funzione inversa G di F

(b) Determinare lo sviluppo di Taylor al secondo ordine della funzione G_1 e al primo ordine della funzione G_2.

Esercizio 4 Sia $F : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definita da
$$F(x_1,x_2,y_1,y_2) = \left(\frac{1}{3}x_1^4 + y_1 \arctan y_2 - \frac{1}{3}e^{y_1},\ x_1x_2 + \tan y_1 + y_2 \sin\left(\frac{\pi}{2}x_1\right)\right)$$

(a) Provare che in un intorno del punto $(1,0,0,0)$ l'insieme $\{F = 0\}$ è il grafico di una funzione $g : B_r(1,0) \longrightarrow B_\rho(0,0)$ di classe C^1.

(b) Fornire una stima dei raggi r e ρ.

(c) Determinare lo sviluppo di Taylor al secondo ordine di g_1 e al primo ordine di g_2.

Esercizio 5 Sia $x_n(k) = \dfrac{1}{n^{\frac{3}{4}}}\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^k$

(a) Calcolare $\|x_n\|_1$ e $\|x_n\|_2$

(b) Studiare la convergenza in l_1 e in l_2 di x_n e calcolarne eventualmente il limite.

Esercizio 6 Sia $x_n(k) = \begin{cases} \frac{1}{k} & \text{se } k \leq n \\ \frac{1}{k^2} & \text{se } k > n \end{cases}$

(a) $\forall\, p \geq 1$ stabilire se x_n converge in l_p determinandone eventualmente il limite.

(b) Studiare la convergenza di x_n in l_∞.

Esercizio 7 Sia $\Psi : \begin{array}{c} l_\infty \longrightarrow l_\infty \\ f \longrightarrow \Psi(f) \end{array}$ definita da $\Psi(x)(k) = \dfrac{k}{k+1}x(k)^2$;

(a) Provare che Ψ ha più di un punto fisso in l_∞ e dedurne che Ψ non è una contrazione in l_∞.

(b) Trovare un sottoinsieme chiuso di l_∞ in cui Ψ è una contrazione.

Esercizio 8 Sia $\Phi : \begin{array}{ccc} (\ C([0,1]), \|\ \|_\infty) & \longrightarrow & (\ C([0,1]), \|\ \|_\infty) \\ f & \longrightarrow & \Phi(f) \end{array}$ dove $\Phi(f)(x) = \dfrac{1}{2} + \displaystyle\int_{f(x)}^{\infty} t^2 f(e^{-t^2})\, e^{-t^2} dt$
e sia $C = \{f \in C([0,1]) \mid 0 \leq f(x) \leq 1\ \forall\, x \in [0,1]\}$.

(a) Provare che $\Phi(C) \subseteq C$ e che Φ è una contrazione in C.

(b) Dimostrare che il punto fisso di Φ in C è una funzione costante.