Esecitazione AM3 n.4-A.A. 2008-2009-23/03/09

Esercitatore: Maristella Petralla

Moltiplicatori di Lagrange

1. Sia
$$f(x,y,z) = \begin{cases} f_1(x,y,z) = x + y + z^2 & \text{se } x > 0 \\ f_2(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 & \text{se } x \leq 0. \end{cases} \tag{1}$$
Sia $D = D_+ \cup D_-$ dove
$$D_\pm = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, \; \pm x \geq 0 \}.$$
Allora:
   (a) calcolare il massimo/minimo assoluto di $f_1(x,y,z)$ in D_+.
   (b) calcolare il massimo/minimo assoluto di $f_2(x,y,z)$ in D_-.
   (c) dai due punti precedenti, dedurre il valore dell'estremo superiore/inferiore di f in D. Stabilire inoltre se tale valore rappresente il massimo/minimo assoluto di f in D indicando i punti dove venisse eventualmente assunto.

2. Sia $f(x,y) = x^2 - xy^2$ e $E := \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, 0 \leq y \leq y \}$. f ammette massimo, minimo o estremo inferiore o superiore in E e in $\mathbb{R}^2$?

3. Sia $A = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, xy + \frac{1}{2}\sin(xy) > \pi \}$ e $f(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}$. Allora
   (a) discutere se l'insieme A é compatto oppure no;
   (b) calcolare, qualora esista, $\lim_{|(x,y)| \to +\infty} f(x,y)$;
   (c) determinare estremo inferiore/superiore di $f(x,y)$ in A ed eventuali punti di minimo/massimo assoluto. (Suggerimento: la funzione $g(t) = t + \frac{1}{2}\sin t$ é monotona strettamente crescente in $\mathbb{R}$ e $g(\pi) = \pi$.)

Soluzioni

1. (a) Consideriamo la funzione $f_1(x,y,z) = x + y + z^2$ su D_+. Poiché $\nabla f_1(,x,y,z) = (1,1,2z) \neq (0,0,0)$, abbiamo che la funzione f_1

non ammette punti critici liberi allinterno di D_+. La frontiera di D+ si spezza in due componenti:

$$\{ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \} \cup \{ x > 0 \}, \quad \{ (0, y, z) : y^2 + z^2 \leq 1 \}.$$

Per quanto riguarda il primo insieme, studiamo i punti critici vincolati di f_1 sulla sfera unitaria prendendo poi in considerazione solo quelli con prima coordinata positiva. Dobbiamo quindi studiare:

$$\begin{cases} 1 = \lambda x, \\ 1 = \lambda y, \\ z(2 - \lambda) = 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases} \tag{2}$$

Dalla terza equazione otteniamo che: $z = 0$ e quindi $x = y = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$, oppure $\lambda = 2$, $x = y = \frac{1}{2}$ e quindi $z = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$. Prendendo in considerazione i punti con prima coordinata positiva, otteniamo i seguenti punti critici vincolati: $P = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$ e $Q_\pm = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \pm\sqrt{2}2)$, su cui la funzione f1 assume i valori: $f_1(P) = \sqrt{2} < f(Q_\pm) = \frac{3}{2}$. Per quanto riguarda il secondo insieme che compone la frontiera di D+, consideriamo la restrizione di f_1 su $\{ x = 0 \} : g(y, z) = y + z^2$. Studiamo poi la funzione $g(y, z)$ nel disco $2-$dimensionale $\{ y^2 + y^2 \leq 1 \}$. É facile vedere che g non ha punti critici liberi allinterno del disco. Passiamo quindi a studiare i punti critici vincolati di g sulla sfera $2-$dimensionale $\{ y^2 + z^2 = 1 \}$. Il sistema

$$\begin{cases} 1 = \lambda y, \\ z(2 - \lambda) = 0, \\ y^2 + z^2 = 1, \end{cases} \tag{3}$$

produce quattro soluzioni $M\pm = (0, \pm 1, 0)$, $T\pm = (0, \frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{3}}{2})$. Poiché $f_1(M\pm) = \pm 1, f_1(T\pm) = \frac{5}{4}$, otteniamo che: $\max_{D_+} f_1 = f_1(Q\pm) = \frac{3}{2}$, $\min_{D_+} f_1 = f_1(M_-) = -1$.

(b) La funzione $f_2(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ rappresenta il quadrato della distanza dallorigine. Quindi $0 \leq f_2 \leq 1$ sul disco $3-$dimensionale $D_+ \cup D_-$ e $f_2(0, 0, 0) = 0$, $f_2 \leq 1$ sulla sfera $\{ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \}$. Quindi: $\max_{D_-} f_2 = 1$, $\min_{D_-} f_2 = 0$.

(c) Poiché $f_1 \geq -1$ in D_+, $f_2 \geq 0$ in D_-, abbiamo che $f \geq -1$ su $D_+ \cup D_-$. Lungo la successione $M_t = (t, -1, 0)$, $t \to 0^+$, abbiamo che $f(M_t) = f_1(M_t) \to f_1(M_-) = -1$. Quindi $\inf_{D_+ \cup D_-} f = -1$ e lestremo inferiore non viene mai raggiunto. Invece il massimo assoluto risulta essere in $Q_\pm$: $\max_{D_+ \cup D_-} f = f(Q_\pm) = \frac{3}{2}$.

2. Basta osservare che $(n, 0), (n, n) \in E$, $f(n, 0) = n^2 \to +\infty$ e $f(n, n) = n^2 - n^3 \to -\infty$ per $n \to +\infty$, otteniamo che

$$\inf_{\mathbb{R}^2} f = -\infty = \inf_E f, \quad \sup_{\mathbb{R}^2} f = +\infty = \sup_E f.$$

3. (a) L'insieme A non é chiuso e neanche limitato. Infatti, la successione $(2\pi n, \frac{1}{n}) \in A$ é illimitata.

   (b) Chiaramente $\lim_{|(x,y)| \to +\infty} f(x, y) = 0$.

   (c) Poiché $f > 0$ in R^2, dal punto precedente otteniamo $\inf_{R^2} f(x, y) = 0$ che non viene mai raggiunto. Sempre dal punto precedente segue che la funzione $f(x, y)$ raggiunge massimo in $\bar{A}$. Determiniamo ora il punto di massimo assoluto di f in $\bar{A}$. Studiamo i punti critici liberi:

$$\nabla f(x, y) = \frac{-2}{(x^2 + y^2)^2}(x, y) = (0, 0) \quad \text{se e solo se} \quad x = y = 0.$$

   Non essendo lorigine un punto di A, tale punto deve essere scartato. Studiamo i punti critici vincolati:

$$\nabla f(x, y) = \frac{-2}{(x^2 + y^2)^2}(x, y) = \lambda(1 + \frac{1}{2} cos(xy))(y, x).$$

   Quindi

$$\begin{cases} \frac{-2}{(x^2+y^2)^2} x = \lambda(1 + \frac{1}{2}\cos(xy))y \\ \frac{-2}{(x^2+y^2)^2} y = \lambda(1 + \frac{1}{2}\cos(xy))x \end{cases} \tag{4}$$

   riassorbiamo i fattori $\frac{-2}{(x^2+y^2)^2}$ e $1 + \frac{1}{2}\cos(xy)$ nel moltiplicatore λ, ponendo $\beta = (1 + \frac{1}{2}\cos(xy))\frac{(x^2+y^2)^2}{-2}$. Dobbiamo quindi studiare il sistema:

$$\begin{cases} x = \beta y \\ y = \beta x, \end{cases} \tag{5}$$

$(x, y) \in \partial A$. Poiché $(0, 0) \notin \partial A$, $\beta, x, y \neq 0$. Allora $x^2 = \beta x\, y = y^2$ e $x = \pm y$. Essendo $(x, -x) \notin \partial A$, otteniamo che i punti critici vincolati P_0 sono della forma (x_0, x_0), dove x_0 deve soddifare $g(x_0^2) = x_0^2 + \frac{1}{2} \sin(x_0^2) = \pi$ in modo tale che $P_0 \in \partial A$. Dal suggerimento, lunica soluzione é $x_0^2 = \pi$. Quindi, $P_0 = (\sqrt{\pi}, \sqrt{\pi})$ é lunico punto critico vincolato di $f(x, y)$ su ∂A. Abbiamo allora $\max_{\bar{A}} f = f(\sqrt{\pi}, \sqrt{\pi}) = \frac{1}{\pi}$. Siccome $f < \frac{1}{2\pi}$ in A e $f(\sqrt{\pi} + \frac{1}{n}, \sqrt{\pi}) \to \frac{1}{2\pi}$ per $n \to +\infty$, dove $P_n = (\sqrt{\pi} + \frac{1}{n}, \sqrt{\pi}) \in A$, otteniamo che $\sup_A f = \frac{1}{2\pi}$ e non é mai raggiunto in A.